Tutorato di Logica - Lezione 10

Manuel Di Agostino

Università di Parma

16 dicembre 2024

Sommario

1. Calcolo logico
   - Regole di inferenza elementari
   - Regole di inferenza condizionali

Sommario

1. Calcolo logico
   - Regole di inferenza elementari
   - Regole di inferenza condizionali

Definizione (Introduzione $\wedge$)

"Se a è vera e b è vera, allora a $\wedge$ b è vera"

$$\frac{a \quad b}{a \wedge b}\ (\mathrm{I}\wedge) \tag{1}$$

Definizione (Eliminazione $\wedge$)

"Se a $\wedge$ b è vera, allora a è vera"

$$\frac{a \wedge b}{a}\ (\mathrm{E}\wedge_1) \tag{2}$$

"Se a $\wedge$ b è vera, allora b è vera"

$$\frac{a \wedge b}{b}\ (\mathrm{E}\wedge_2) \tag{3}$$

Definizione (Introduzione $\vee$)

$$\frac{a}{a \vee b}\ (\mathrm{I}\vee_1) \tag{4}$$

$$\frac{b}{a \vee b}\ (\mathrm{I}\vee_2) \tag{5}$$

Definizione (Eliminazione $\Rightarrow$, *Modus ponens*)

$$\frac{a \quad a \Rightarrow b}{b}\ (\mathrm{E} \Rightarrow) \tag{6}$$

Definizione (Introduzione $\perp$)

$$\frac{a \quad \neg a}{\perp}\ (\mathrm{I}\perp) \tag{7}$$

Definizione (Eliminazione $\perp$, *Ex falso quodlibet*)

$$\frac{\perp}{a}\ (\mathrm{E}\perp) \tag{8}$$

Definizione (Eliminazione ¬)

$$\frac{a \quad \neg a}{\perp}\ (\mathrm{E}\neg) \tag{9}$$

Sommario

Definizione (Eliminazione $\vee$)

$$\frac{a \vee b \quad \begin{matrix}[a]\\ c\end{matrix} \quad \begin{matrix}[b]\\ c\end{matrix}}{c}\ (\mathrm{E}\vee) \tag{10}$$

Definizione (Introduzione $\Rightarrow$)

$$\frac{\begin{matrix}[a]\\ b\end{matrix}}{a \Rightarrow b}\ (\mathrm{I} \Rightarrow) \tag{11}$$

Definizione (Introduzione ¬)

$$\frac{\begin{array}{c}[a]\\ \bot\end{array}}{\neg a}\ (\mathrm{I}\neg) \tag{12}$$

Definizione (RAA)

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg a]\\ \bot\end{array}}{a}\ (\mathrm{RAA}) \tag{13}$$

- Queste regole offrono una modalità diversa dalle tavole di verità per dimostrare logicamente un enunciato

- Queste regole offrono una modalità diversa dalle tavole di verità per dimostrare logicamente un enunciato
- Fanno riferimento al piano della *sintassi* e sono coerenti a quello *semantico*

- Queste regole offrono una modalità diversa dalle tavole di verità per dimostrare logicamente un enunciato
- Fanno riferimento al piano della *sintassi* e sono coerenti a quello *semantico*
- Essendo pure regole di scrittura, possono facilmente essere implementate in un calcolatore (sistema di dimostrazione automatico)

- Queste regole offrono una modalità diversa dalle tavole di verità per dimostrare logicamente un enunciato
- Fanno riferimento al piano della *sintassi* e sono coerenti a quello *semantico*
- Essendo pure regole di scrittura, possono facilmente essere implementate in un calcolatore (sistema di dimostrazione automatico)
- Le dimostrazioni possono essere ricondotte a schemi che hanno la struttura di alberi (*G. Gentzen*, 1934)

Esercizio 1

Dimostrare i seguenti utilizzando le regole di deduzione naturale:

1. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$
2. $\vdash (a \wedge \neg a) \Rightarrow \bot$
3. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$
4. $\vdash (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$

Soluzione dell'esercizio 1

1. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\cfrac{}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)

Soluzione dell'esercizio 1

1. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\dfrac{\dfrac{}{a}\ (\mathrm{RAA}), [\neg a]}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Procediamo poi applicando la regola per assurdo

Soluzione dell'esercizio 1

1. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\bot}\ (\mathrm{I}\bot)}{a}\ (\mathrm{RAA}), [\neg a]}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Procediamo poi applicando la regola per assurdo
- Osserviamo che possiamo introdurre $\bot$ a partire da due formule qualsiasi $p, \neg p$

Soluzione dell'esercizio 1

1. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg a] \qquad [\neg\neg a]}{\bot}\ (\mathrm{I}\bot)}{a}\ (\mathrm{RAA}), [\neg a]}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Procediamo poi applicando la regola per assurdo
- Osserviamo che possiamo introdurre $\bot$ a partire da due formule qualsiasi $p, \neg p$

2. $\vdash (a \land \neg a) \Rightarrow \bot$

$$\dfrac{}{(a \land \neg a) \Rightarrow \bot}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [a \land \neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)

2. $\vdash (a \land \neg a) \Rightarrow \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a}\,(\mathrm{E}\land_1) \qquad \dfrac{}{\neg a}\,(\mathrm{E}\land_2)}{\bot}\,(\mathrm{I}\bot)}{(a \land \neg a) \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{I} \Rightarrow), [a \land \neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Procediamo poi introducendo $\bot$ dalle premesse $a, \neg a$

2. $\vdash (a \land \neg a) \Rightarrow \bot$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a \land \neg a]}{a}\,(\mathrm{E}\land_1) \qquad \dfrac{[a \land \neg a]}{\neg a}\,(\mathrm{E}\land_2)}{\bot}\,(\mathrm{I}\bot)}{(a \land \neg a) \Rightarrow \bot}\,(\mathrm{I} \Rightarrow), [a \land \neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Procediamo poi introducendo $\bot$ dalle premesse $a, \neg a$
- Poichè abbiamo supposto l'ipotesi sussidiaria $[a \land \neg a]$, ci aspettiamo di ritrovarla come foglia dell'albero e cancellarla. Si può facilmente ottenere applicando $(\mathrm{E}\vee)$

3. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\cfrac{}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)

3. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\cfrac{\overline{a}\ (\mathrm{RAA}), [\neg a]}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Tramite (RAA) introduciamo $\bot$

3. $\vdash \neg\neg a \Rightarrow a$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{[\neg a] \qquad [\neg\neg a]}{\bot}\ (\mathrm{I}\bot)}{a}\ (\mathrm{RAA}), [\neg a]}{\neg\neg a \Rightarrow a}\ (\mathrm{I} \Rightarrow), [\neg\neg a]$$

- Individuiamo il connettivo principale, ossia quello con precedenza minore ($\Rightarrow$); iniziamo la costruzione dal basso (radice)
- Tramite (RAA) introduciamo $\bot$
- Ricordiamo che $\bot$ può essere introdotto a partire da due formule qualsiasi $p, \neg p$

4. $\vdash (a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a] \quad [a \Rightarrow b]}{b}\,(\mathrm{MP}) \qquad \dfrac{[a] \quad [a \Rightarrow (b \Rightarrow c)]}{b \Rightarrow c}\,(\mathrm{MP})}{c}\,(\mathrm{MP})}{(a \Rightarrow c)}\,(\mathrm{I} \Rightarrow), [a]}{(a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c)}\,(\mathrm{I} \Rightarrow), [a \Rightarrow b]}{(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (a \Rightarrow c))}\,(\mathrm{I} \Rightarrow), [a \Rightarrow (b \Rightarrow c)]$$