Tutorato di Logica - Lezione 9

Manuel Di Agostino

Università di Parma

02 dicembre 2024

Sommario

Esercizio 1

Dimostrare per induzione strutturale che ogni formula ben formata contiene lo stesso numero di parentesi aperte e chiuse.

Soluzione dell'esercizio 1

- Se ammettiamo l'utilizzo delle parentesi per disambiguare l'interpretazione di una formula ben formata, stiamo considerando FBF come il minimo insieme che soddisfa le seguenti:

Definizione (Formule ben formate)

- $\forall a \in A$ *con a formula atomica,* $a \in FBF$
- $\bot \in FBF$
- $\forall x \in FBF. \neg x \equiv (\neg x) \in FBF$
- $\forall x, y \in FBF. \, x \bowtie y \equiv (x \bowtie y) \in FBF$, *con* $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$

Soluzione dell'esercizio 1

- Se ammettiamo l'utilizzo delle parentesi per disambiguare l'interpretazione di una formula ben formata, stiamo considerando FBF come il minimo insieme che soddisfa le seguenti:

Definizione (Formule ben formate)

- $\forall a \in A$ *con a formula atomica,* $a \in FBF$
- $\perp \in FBF$
- $\forall x \in FBF. \neg x \equiv (\neg x) \in FBF$
- $\forall x, y \in FBF. x \bowtie y \equiv (x \bowtie y) \in FBF$, *con* $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$

- Modelliamo la richiesta dell'esercizio come una proprietà degli elementi $x \in$ FBF:

$$P(x) \Leftrightarrow \text{ “il numero di “(” e di “)” in } x \text{ coincidono”}$$

- Indichiamo con α il numero di parentesi aperte e con ω quello delle parentesi chiuse; utilizziamo quindi l'induzione strutturale sulle formule ben formate:

Definizione (Induzione strutturale su FBF)

Sia P una proprietà su FBF. Si dice che $\forall x \in FBF.\, P(x)$ *se e solo se:*

- $\forall a \in FBF$ *con* a *formula atomica, vale* $P(a)$
- *vale* $P(\bot)$
- $\forall x \in FBF.\, P(x) \Rightarrow P(\neg x)$
- $\forall x, y \in FBF.\, (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow P(x \bowtie y)$, *con* $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

- Indichiamo con α il numero di parentesi aperte e con ω quello delle parentesi chiuse; utilizziamo quindi l'induzione strutturale sulle formule ben formate:

Definizione (Induzione strutturale su FBF)

Sia P una proprietà su FBF. Si dice che $\forall x \in FBF.\ P(x)$ *se e solo se:*

- $\forall a \in FBF$ *con a formula atomica, vale* $P(a)$
- *vale* $P(\perp)$
- $\forall x \in FBF.\ P(x) \Rightarrow P(\neg x)$
- $\forall x, y \in FBF.\ (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow P(x \bowtie y)$, *con* $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}$

1. Sia a una formula atomica. Per definizione di FBF, non è ammesso l'utilizzo di parentesi. Quindi $\alpha_a = \omega_a = 0$, ossia vale $P(a)$

2. Stesso discorso per $\perp$: $\alpha_\perp = \omega_\perp = 0$, ossia vale $P(\perp)$

2. Stesso discorso per $\perp$: $\alpha_\perp = \omega_\perp = 0$, ossia vale $P(\perp)$
3. Passo induttivo 1: sia $x \in$ FBF e supponiamo che valga $P(x)$, ossia $\alpha_x = \omega_x$. Per definizione di FBF:

$$\neg x \equiv (\neg x)$$

e quindi

$$\begin{cases} \alpha_{\neg x} = \alpha_x + 1 \\ \omega_{\neg x} = \omega_x + 1 \end{cases}$$

Essendo $\alpha_x = \omega_x$ otteniamo $\alpha_{\neg x} = \omega_{\neg x}$, ossia vale $P(\neg x)$

4. Passo induttivo 2: siano $x, y \in$ FBF e supponiamo che valgano $P(x), P(y)$, ossia $\alpha_x = \omega_x \wedge \alpha_y = \omega_y$. Per definizione di FBF:

$$x \wedge y \equiv (x \wedge y)$$

e quindi

$$\begin{cases} \alpha_{(x \wedge y)} = \alpha_{x \wedge y} + 1 \\ \omega_{(x \wedge y)} = \omega_{x \wedge y} + 1 \end{cases}$$

Essendo $\alpha_x = \omega_x \wedge \alpha_y = \omega_y$ otteniamo

$$\alpha_{(x \wedge y)} = \alpha_{x \wedge y} + 1 = \omega_{x \wedge y} + 1 = \omega_{(x \wedge y)}$$

ossia vale $P(x \wedge y)$.

$\square$

4. Passo induttivo 2: siano $x, y \in$ FBF e supponiamo che valgano $P(x), P(y)$, ossia $\alpha_x = \omega_x \land \alpha_y = \omega_y$. Per definizione di FBF:

$$x \land y \equiv (x \land y)$$

e quindi

$$\begin{cases} \alpha_{(x \land y)} = \alpha_{x \land y} + 1 \\ \omega_{(x \land y)} = \omega_{x \land y} + 1 \end{cases}$$

Essendo $\alpha_x = \omega_x \land \alpha_y = \omega_y$ otteniamo

$$\alpha_{(x \land y)} = \alpha_{x \land y} + 1 = \omega_{x \land y} + 1 = \omega_{(x \land y)}$$

ossia vale $P(x \land y)$.

5. I casi $\lor, \Rightarrow$ sono analoghi.

$\square$

4. Passo induttivo 2: siano $x, y \in$ FBF e supponiamo che valgano $P(x), P(y)$, ossia $\alpha_x = \omega_x \wedge \alpha_y = \omega_y$. Per definizione di FBF:

$$x \wedge y \equiv (x \wedge y)$$

e quindi

$$\begin{cases} \alpha_{(x \wedge y)} = \alpha_{x \wedge y} + 1 \\ \omega_{(x \wedge y)} = \omega_{x \wedge y} + 1 \end{cases}$$

Essendo $\alpha_x = \omega_x \wedge \alpha_y = \omega_y$ otteniamo

$$\alpha_{(x \wedge y)} = \alpha_{x \wedge y} + 1 = \omega_{x \wedge y} + 1 = \omega_{(x \wedge y)}$$

ossia vale $P(x \wedge y)$.

5. I casi $\vee, \Rightarrow$ sono analoghi.

- Per induzione strutturale sulle formule di FBF, abbiamo dunque dimostrato che $\forall x \in \text{FBF}.P(x)$.

$\square$

Definizione (Conseguenza semantica)

Sia $A \subseteq FBF$. Si dice che $p \in FBF$ è una ***conseguenza semantica*** *di A se e solo se*

$$\forall v.(\forall a \in A.(v(a) = 1) \Longrightarrow v(p) = 1)$$

e si scrive $A \models p$.
Quando l'insieme $A = \{a\}$, ammettiamo la scrittura $a \models p \equiv \{a\} \models p$.

Lemma

Siano $A \subseteq FBF$ e $p \in FBF$. Allora

$$A \models p \Leftrightarrow A \cup \{\neg p\} \text{ è insoddisfacibile}$$

Lemma

Siano $p, q \in FBF$. Allora:

$$p \models q \Leftrightarrow \models p \Rightarrow q$$

Esercizio 2

Per ogni $a, b, c \in \text{FBF}$, si dimostrino le seguenti:

1. $a \models a$
2. $(a \models b \wedge b \models c) \Rightarrow a \models c$

Soluzione dell'esercizio 2

1. Possiamo dimostrare la (1) utilizzando il lemma (2):

$$a \models a \Leftrightarrow \models a \Rightarrow a$$

che è chiaramente vero

Soluzione dell'esercizio 2

1. Possiamo dimostrare la (1) utilizzando il lemma (2):

$$a \models a \Leftrightarrow \models a \Rightarrow a$$

   che è chiaramente vero

2. Per quanto riguarda la (2):
   - utilizzando il lemma (2):

$$\begin{cases} a \models b \Leftrightarrow \models a \Rightarrow b \\ b \models c \Leftrightarrow \models b \Rightarrow c \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 2

1. Possiamo dimostrare la (1) utilizzando il lemma (2):

$$a \models a \Leftrightarrow \models a \Rightarrow a$$

   che è chiaramente vero

2. Per quanto riguarda la (2):
   - utilizzando il lemma (2):

$$\begin{cases} a \models b \Leftrightarrow \models a \Rightarrow b \\ b \models c \Leftrightarrow \models b \Rightarrow c \end{cases}$$

   - inoltre per ipotesi:

$$\begin{cases} v(a \Rightarrow b) = 1 \Leftrightarrow v(a) \leq v(b) \\ v(b \Rightarrow c) = 1 \Leftrightarrow v(b) \leq v(c) \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 2

1. Possiamo dimostrare la (1) utilizzando il lemma (2):

$$a \models a \Leftrightarrow \models a \Rightarrow a$$

   che è chiaramente vero

2. Per quanto riguarda la (2):
   - utilizzando il lemma (2):

$$\begin{cases} a \models b \Leftrightarrow \models a \Rightarrow b \\ b \models c \Leftrightarrow \models b \Rightarrow c \end{cases}$$

   - inoltre per ipotesi:

$$\begin{cases} v(a \Rightarrow b) = 1 \Leftrightarrow v(a) \leq v(b) \\ v(b \Rightarrow c) = 1 \Leftrightarrow v(b) \leq v(c) \end{cases}$$

   - si conclude facilmente che $\forall v.(v(a) \leq v(c))$, ossia

$$\models a \Rightarrow c \Longleftrightarrow a \models c$$

Esercizio 3

Si dimostrino le seguenti:

1. $b \models a \lor b$
2. $a \land b \models a$
3. $a \land b \models b$
4. $\{a, a \Rightarrow b\} \models b$ (*modus ponens*)

Soluzione dell'esercizio 3

1. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} b \models a \lor b &\Leftrightarrow \models b \Rightarrow (a \lor b) \\ &\Leftrightarrow \models \neg b \lor (a \lor b) \\ &\Leftrightarrow \models (\neg b \lor b) \lor a \end{aligned}$$

Chiaramente, per ogni v si ha:

$$\begin{aligned} v((\neg b \lor b) \lor a) &= v(\neg b \lor b) + v(a) - v(\neg b \lor b)v(a) \\ &= 1 + v(a) - v(a) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
a \wedge b \models a \Leftrightarrow & \models a \wedge b \Rightarrow a \\
\Leftrightarrow & \models \neg a \vee b \vee a \\
\Leftrightarrow & \models (\neg a \vee a) \vee b
\end{aligned}
$$

2. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} a \wedge b \models a &\Leftrightarrow \models a \wedge b \Rightarrow a \\ &\Leftrightarrow \models \neg a \vee b \vee a \\ &\Leftrightarrow \models (\neg a \vee a) \vee b \end{aligned}$$

3. Analogo al precedente.

4. Per il teorema della deduzione semantica:

$$
\begin{aligned}
\{a, a \Rightarrow b\} \models b \Leftrightarrow & \models (a \Rightarrow ((a \Rightarrow b) \Rightarrow (b)) \\
\Leftrightarrow & \models (a \Rightarrow ((\neg a \vee b) \Rightarrow (b))) \\
\Leftrightarrow & \models (a \Rightarrow (\neg(\neg a \vee b) \vee (b))) \\
\Leftrightarrow & \models (a \Rightarrow (a \wedge \neg b) \vee b)) \\
\Leftrightarrow & \models (\neg a \vee ((a \wedge \neg b) \vee b))) \\
\Leftrightarrow & \models (\neg a \vee ((a \vee b) \wedge (\neg b \vee b))) \\
\Leftrightarrow & \models (\neg a \vee (a \vee b)) \wedge (\neg a \vee (\neg b \vee b)) \\
\Leftrightarrow & \models ((\neg a \vee a) \vee b) \wedge (\neg a \vee (\neg b \vee b))
\end{aligned}
$$

Banalmente:

$$
\begin{aligned}
& v((\neg a \vee a) \vee b) \wedge (\neg a \vee (\neg b \vee b)) \\
& = v((\neg a \vee a) \vee b) \cdot v(\neg a \vee (\neg b \vee b)) \\
& = 1 \cdot 1 \\
& = 1
\end{aligned}
$$

Esercizio 4

Trovare la forma normale congiuntiva (CNF) e digiuntiva (DNF) per le seguenti formule:

1. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)$
2. $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)) \wedge d$

Provate voi (15 min.)

Soluzione dell'esercizio 4

1. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)$
   - Trasformiamo la proposizione in modo che abbia negazioni soltanto sui letterali, e manteniamo solo i connettivi principali:

$$\begin{aligned}(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c) &= \neg(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee \neg c) && \text{(def. di } \Rightarrow\text{)}\\ &= (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee \neg c) && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 4

1. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)$
   - Trasformiamo la proposizione in modo che abbia negazioni soltanto sui letterali, e manteniamo solo i connettivi principali:

$$\begin{aligned}(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c) &= \neg(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee \neg c) && \text{(def. di } \Rightarrow\text{)}\\ &= (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee \neg c) && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

   - Da questo punto possiamo ottenere direttamente la DNF:

$$(a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee \neg c) = (a \wedge \neg b) \vee (\neg b) \vee (\neg c)$$

Soluzione dell'esercizio 4

1. $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)$
   - Trasformiamo la proposizione in modo che abbia negazioni soltanto sui letterali, e manteniamo solo i connettivi principali:

$$\begin{aligned} (a \Rightarrow b) \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c) &= \neg(\neg a \vee b) \vee (\neg b \vee \neg c) && \text{(def. di } \Rightarrow\text{)} \\ &= (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee \neg c) && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

   - Da questo punto possiamo ottenere direttamente la DNF:

$$(a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee \neg c) = (a \wedge \neg b) \vee (\neg b) \vee (\neg c)$$

   - Oppure la CNF:

$$\begin{aligned} (a \wedge \neg b) \vee (\neg b \vee \neg c) &= (a \vee (\neg b \vee \neg c)) \wedge (\neg b \vee (\neg b \vee \neg c)) \\ &= (a \vee (\neg b) \vee (\neg c)) \wedge (\neg b \vee (\neg b) \vee (\neg c)) \\ &= (a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee \neg c) \end{aligned}$$

2. $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)) \wedge d$
   - Trasformiamo la proposizione in modo che abbia negazioni soltanto sui letterali, e manteniamo solo i connettivi principali:

$$\begin{aligned}\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)) \wedge d &= \neg(\neg a \vee (\neg b \vee \neg c)) \wedge d\\ &= \neg(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge d\\ &= (a \wedge b \wedge c) \wedge d\\ &= (a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d)\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto direttamente la CNF

2. $\neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)) \wedge d$
   - Trasformiamo la proposizione in modo che abbia negazioni soltanto sui letterali, e manteniamo solo i connettivi principali:

$$\begin{aligned} \neg(a \Rightarrow (b \Rightarrow \neg c)) \wedge d &= \neg(\neg a \vee (\neg b \vee \neg c)) \wedge d \\ &= \neg(\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge d \\ &= (a \wedge b \wedge c) \wedge d \\ &= (a) \wedge (b) \wedge (c) \wedge (d) \end{aligned}$$

   Abbiamo ottenuto direttamente la CNF
   - in realtà, può essere vista anche come un unico atomo in DNF:

$$a \wedge b \wedge c \wedge d = (a \wedge b \wedge c \wedge d)$$