Tutorato di Logica - Lezione 8

Manuel Di Agostino

Università di Parma

25 novembre 2024

Sommario

1. Logica proposizionale
   - Induzione strutturale
   - Interpretazione semantica
   - Soddisfacibilità

Sommario

Definizione (Formule ben formate, FBF)

Dato un alfabeto $\mathcal{A}$ del linguaggio della logica proposizioale, l'insieme delle ***formule ben formate*** *(FBF) del linguaggio proposizionale è definito dalle seguenti:*

- $\forall a \in \mathcal{A}$ *con a formula atomica,* $a \in FBF$
- $\bot \in FBF$
- $\forall x \in FBF. \neg x \in FBF$
- $\forall x, y \in FBF. x \bowtie y \in FBF$, *con* $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$

Definizione (Induzione strutturale su FBF)

Sia P una proprietà su FBF. Si dice che $\forall x \in FBF.\, P(x)$ se e solo se:

- $\forall a \in FBF$ *con a formula atomica, vale* $P(a)$
- *vale* $P(\bot)$
- $\forall x \in FBF.\, P(x) \Rightarrow P(\neg x)$
- $\forall x, y \in FBF.\, (P(x) \wedge P(y)) \Rightarrow P(x \bowtie y)$, *con* $\bowtie \in \{\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \oplus\}$

Sommario

1. Logica proposizionale
   - Induzione strutturale
   - Interpretazione semantica
   - Soddisfacibilità

Definizione (Valutazione semantica)

*Si dice **valutazione** ogni funzione*

$$v : FBF \to \{0, 1\}$$

dove $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ *è l'insieme dei valori di verità.*

Definizione (Esempio di f. di valutazione)

Date $p, q \in FBF$, un esempio di funzione di valutazione è il seguente:

- $v(\bot) = 0$
- $v(\neg p) = 1 - v(p)$
- $v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$
- $v(p \vee q) = v(p) + v(q) - v(p)v(q)$
- $v(p \Rightarrow q) = 1 - v(p) + v(p)v(q)$

Definizione (Funzione di interpretazione)

*Date $p, q \in FBF$, una funzione $v : FBF \to \mathcal{B}$ si dice **interpretazione** se:*

- $v(\bot) = 0$
- $v(\neg p) = 1 - v(p)$
- $v(p \wedge q) = min(v(p), v(q))$
- $v(p \vee q) = max(v(p), v(q))$
- $v(p \Rightarrow q) = 1 \Leftrightarrow v(p) \leq v(q)$

Solitamente, v si indica con $[\![\cdot]\!]$.

Esercizio 1

Siano $p, q \in$ FBF. Dimostrare le seguenti:

1. $v(\neg\neg p) = v(p)$
2. $v(\neg(p \wedge q)) = v((\neg p) \vee (\neg q))$
3. $v(\neg(p \vee q)) = v((\neg p) \wedge (\neg q))$
4. $v(p \Rightarrow q) = v(\neg p \vee q)$

Soluzione dell'esercizio 1

Utilizziamo la definizione di v:

1. osserviamo che:

$$
\begin{aligned}
v(\neg\neg p) &= 1 - v(\neg p) && (v \text{ di } \neg) \\
&= 1 - (1 - v(p)) && (v \text{ di } \neg) \\
&= v(p)
\end{aligned}
$$

1. analogamente:

$$
\begin{aligned}
& v((\neg p) \vee (\neg q)) \\
& = v(\neg p) + v(\neg q) - v(\neg p)v(\neg q) && (v \text{ di } \vee) \\
& = (1 - v(p)) + (1 - v(q)) - (1 - v(p))(1 - v(q)) && (v \text{ di } \neg) \\
& = 2 - v(p) - v(q) - (1 - v(p) - v(q) + v(p)v(q)) \\
& = 2 - \cancel{v(p)} - \cancel{v(q)} - 1 + \cancel{v(p)} + \cancel{v(q)} - v(p)v(q)) \\
& = 1 - v(p)v(q) \\
& = 1 - v(p \wedge q) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = v(\neg(p \wedge q)) && (v \text{ di } \neg)
\end{aligned}
$$

1. analogamente:

$$
\begin{aligned}
& v(\neg p \wedge \neg q) \\
& = v(\neg p)v(\neg q) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = (1 - v(p))(1 - v(q)) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = 1 - v(p) - v(q) + v(p)v(q) \\
& = 1 - (v(p) + v(q) - v(p)v(q)) \\
& = 1 - v(p \vee q) && (v \text{ di } \wedge) \\
& = v(\neg(p \vee q)) && (v \text{ di } \neg)
\end{aligned}
$$

1. analogamente:

$$
\begin{aligned}
& v(\neg p \lor q) \\
& = v(\neg p) + v(q) - v(\neg p)v(q) && (v \text{ di } \lor) \\
& = (1 - v(p)) + v(q) - (1 - v(p))v(q) && (v \text{ di } \neg) \\
& = 1 - v(p) + \cancel{v(q)} - \cancel{v(q)} + v(p)v(q) \\
& = 1 - v(p) + v(p)v(q) \\
& = v(p \Rightarrow q) && (v \text{ di } \Rightarrow)
\end{aligned}
$$

Sommario

Definizione

Siano $p \in FBF$ e v una qualche interpretazione. Se $v(p) = 1$ allora si dice che:

- *p è **soddisfatta** nell'interpretazione v*
- *v è **modello** per p*

Si scrive $v \models p$ e si legge "v modella p".

Definizione

Sia $p \in FBF$ allora è

- ***soddisfacibile** se ha almeno un modello:*

$$\exists v : v \models p$$

- ***contraddittoria** se non è soddisfacibile:*

$$\forall v : v \not\models p$$

  e si scrive $\not\models p$

- ***valida** (tautologia) se:*

$$\forall v : v \models p$$

  e si scrive $\models p$

Esercizio 2

Usando la definizione di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se, per ogni formula $A \in \mathrm{FBF}$, le formule

1. $A \vee \neg A$ (*p. del terzo escluso*)
2. $\neg(A \vee \neg A)$ (*p. di non contraddizione*)
3. $(\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A$ (*consequentia mirabilis*)

sono tautologie.

Soluzione dell'esercizio 2

1. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
v(A \vee \neg A) &= v(A) + v(\neg A) - v(A)v(\neg A) \\
&= \cancel{v(A)} + (1 - \cancel{v(A)}) - v(A)(1 - v(A)) \\
&= 1 - v(A) + v(A)^2
\end{aligned}
$$

Soluzione dell'esercizio 2

1. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(A \vee \neg A) &= v(A) + v(\neg A) - v(A)v(\neg A) \\ &= \cancel{v(A)} + (1 - \cancel{v(A)}) - v(A)(1 - v(A)) \\ &= 1 - v(A) + v(A)^2 \end{aligned}$$

   - $v(A)$ può assumere solo due valori, 0 o 1; quindi:

$$\begin{cases} v(A \vee \neg A) = 1 & \text{se } v(A) = 0 \\ v(A \vee \neg A) = 1 & \text{se } v(A) = 1 \end{cases}$$

   ma allora $\forall v$ si ottiene $v(A) = 1$, ossia (1) è una tautologia.

2. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
v(\neg(A \wedge \neg A)) &= 1 - v(A \wedge \neg A) \\
&= 1 - v(A)v(\neg A) \\
&= 1 - v(A)(1 - v(A)) \\
&= 1 - v(A) + v(A)^2
\end{aligned}
$$

2. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$\begin{aligned} v(\neg(A \wedge \neg A)) &= 1 - v(A \wedge \neg A) \\ &= 1 - v(A)v(\neg A) \\ &= 1 - v(A)(1 - v(A)) \\ &= 1 - v(A) + v(A)^2 \end{aligned}$$

   - analogo al precedente.

3. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A)\\
&= 1 - v(\neg A \Rightarrow A) + v(\neg A \Rightarrow A)v(A)\\
&= 1 - (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A)) + (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A))v(A)\\
&= v(\neg A) - v(\neg A)v(A) + v(A) - v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2\\
&= v(\neg A) + v(A) - 2v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2\\
&= v(A) + v(\neg A)(1 - 2v(A) + v(A)^2)\\
&= v(A) + v(\neg A)(1 - v(A))^2\\
&= v(A) + (1 - v(A))^3
\end{aligned}
$$

3. Utilizziamo la funzione di interpretazione.
   - Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) \\
& = 1 - v(\neg A \Rightarrow A) + v(\neg A \Rightarrow A)v(A) \\
& = 1 - (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A)) + (1 - v(\neg A) + v(\neg A)v(A))v(A) \\
& = v(\neg A) - v(\neg A)v(A) + v(A) - v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2 \\
& = v(\neg A) + v(A) - 2v(\neg A)v(A) + v(\neg A)v(A)^2 \\
& = v(A) + v(\neg A)(1 - 2v(A) + v(A)^2) \\
& = v(A) + v(\neg A)(1 - v(A))^2 \\
& = v(A) + (1 - v(A))^3
\end{aligned}
$$

   - $v(A)$ può assumere solo due valori, 0 o 1; quindi:

$$
\begin{cases}
v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) = 0 + (1-0)^3 = 1 & \text{se } v(A) = 0 \\
v((\neg A \Rightarrow A) \Rightarrow A) = 1 + (1-1)^3 = 1 & \text{se } v(A) = 1
\end{cases}
$$

Esercizio 3

Si considerino le seguenti formule:

1. $(a \vee c) \wedge \neg c$
2. $b \Rightarrow a$
3. $\neg(b \wedge c)$

Esiste un'interpretazione per gli atomi a, b, c che le modelli contemporaneamente?

Soluzione dell'esercizio 3

- Dobbiamo trovare un'interpretazione v che soddisfi il seguente:

$$\begin{cases} v((a \vee c) \wedge \neg c) = 1 \\ v(b \Rightarrow a) = 1 \\ v(\neg(b \wedge c)) = 1 \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Dobbiamo trovare un'interpretazione v che soddisfi il seguente:

$$\begin{cases} v((a \vee c) \wedge \neg c) = 1 \\ v(b \Rightarrow a) = 1 \\ v(\neg(b \wedge c)) = 1 \end{cases}$$

- Utilizzando la definizione di v otteniamo:

$$\begin{cases} v((a \vee c) \wedge \neg c) = 1 \\ v(b \Rightarrow a) = 1 \\ v(\neg(b \wedge c)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(a \vee c)v(\neg c) = 1 \\ 1 - v(b) + v(b)v(a) = 1 \\ 1 - v(b \wedge c) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ -v(b) + v(b)v(a) = 0 \\ -v(b \wedge c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ v(a)v(b) = v(b) \\ v(b)v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v(a) + v(c) - v(a)v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \vee v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 + v(c) - v(c))(1 - v(c)) = 1 \\ v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \vee v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - v(c)) = 1 \\ v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \vee v(c) = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} v(c) = 0 \\ v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \vee v(c) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - v(c)) = 1 \\ v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \lor v(c) = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} v(c) = 0 \\ v(a) = 1 \\ v(b) = 0 \lor v(c) = 0 \end{cases}$$

- Deriva dunque che è possibile costruire due interpretazioni che soddisfano la richiesta:

$$v_1 : (a, b, c) \mapsto (1, 0, 0)$$
$$v_2 : (a, b, c) \mapsto (1, 1, 0)$$

Esercizio 4

Usando la definizione di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se, per ogni formula $A, B, C \in \mathrm{FBF}$, la formula

$$\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)$$

è una tautologia.
Provate voi! (10 min.)

Soluzione dell'esercizio 4

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:

$$v(\neg(A \land \neg A) \Rightarrow ((B \lor C) \lor \neg C)) = 1$$

Soluzione dell'esercizio 4

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$

- Ma questo è vero se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C)$$

Soluzione dell'esercizio 4

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$

- Ma questo è vero se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C)$$

- Abbiamo già dimostrato che $v(\neg(A \wedge \neg A)) = 1$. Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} v((B \vee C) \vee \neg C) &= v(B \vee (C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), v(C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 4

- Osserviamo che la formula proposta è una tautologia se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A) \Rightarrow ((B \vee C) \vee \neg C)) = 1$$

- Ma questo è vero se e solo se:

$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C)$$

- Abbiamo già dimostrato che $v(\neg(A \wedge \neg A)) = 1$. Notiamo ora che:

$$\begin{aligned} v((B \vee C) \vee \neg C) &= v(B \vee (C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), v(C \vee \neg C)) \\ &= \max(v(B), 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Abbiamo ottenuto che

$$v(\neg(A \wedge \neg A)) \leq v((B \vee C) \vee \neg C) \Leftrightarrow 1 \leq 1$$

il che conclude la dimostrazione.

Esercizio 5

A partire dall'esercizio precedente e usando la definizione di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se, per ogni formula $A, B, C \in \text{FBF}$, la formula

$$\neg((B \vee C) \vee \neg C) \wedge \neg(A \wedge \neg A)$$

è una contraddizione.

Provate voi!

Esercizio 6

Sia $p \in$ FBF. Dimostrare che p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Esercizio 6

Sia $p \in$ FBF. Dimostrare che p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Soluzione dell'esercizio 6

- Sia p una tautologia; per definizione

$$\models p \Leftrightarrow \forall v : v(p) = 1$$

Esercizio 6

Sia $p \in \text{FBF}$. Dimostrare che p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Soluzione dell'esercizio 6

- Sia p una tautologia; per definizione

$$\models p \Leftrightarrow \forall v : v(p) = 1$$

- Osserviamo ora che:

$$v(p) = 1 \Leftrightarrow 1 - v(p) = 0 \Leftrightarrow v(\neg p) = 0$$

Esercizio 6

Sia $p \in$ FBF. Dimostrare che p è una tautologia se e solo se $\neg p$ è una contraddizione.

Soluzione dell'esercizio 6

- Sia p una tautologia; per definizione

$$\models p \Leftrightarrow \forall v : v(p) = 1$$

- Osserviamo ora che:

$$v(p) = 1 \Leftrightarrow 1 - v(p) = 0 \Leftrightarrow v(\neg p) = 0$$

- Quindi

$$\models p \Leftrightarrow \forall v : v(\neg p) = 0 \Leftrightarrow \not\models \neg p$$

Esercizio 7

Usando la definizione di valutazione per la logica proposizionale (non devono essere usate le tavole di verità) stabilire se

$$(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \vee B)$$

dove $B = (B_1 \vee (B_2 \vee (B_3 \vee (\cdots (B_{99} \vee B_{100})))))$.

Provate voi!

Soluzione dell'esercizio 7

- Troviamo una formula logica equivalente, sfruttando quanto dimostrato nell'esercizio (1). Notiamo che:

$$v(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))) = v((\neg C) \Rightarrow B))$$

Soluzione dell'esercizio 7

- Troviamo una formula logica equivalente, sfruttando quanto dimostrato nell'esercizio (1). Notiamo che:

$$v(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))) = v((\neg C) \Rightarrow B))$$

- Inoltre si dimostra che:

$$v((\neg C) \Rightarrow B)) = v(C \vee B)$$

Soluzione dell'esercizio 7

- Troviamo una formula logica equivalente, sfruttando quanto dimostrato nell'esercizio (1). Notiamo che:

$$v(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))) = v((\neg C) \Rightarrow B))$$

- Inoltre si dimostra che:

$$v((\neg C) \Rightarrow B)) = v(C \vee B)$$

- Quindi a questo punto:

$$\begin{aligned} & v((\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B)) \Rightarrow (C \vee B)) = 1 \\ \Leftrightarrow\ & v(\neg\neg((\neg C) \Rightarrow B))) \leq v(C \vee B) \\ \Leftrightarrow\ & v((\neg C) \Rightarrow B)) \leq v(C \vee B) \\ \Leftrightarrow\ & v(C \vee B) \leq v(C \vee B) \end{aligned}$$

chiaramente vero!