Tutorato di Logica - Lezione 6

Manuel Di Agostino

Università di Parma

11 novembre 2024

Sommario

Sommario

Teorema (Principio della somma)

La cardinalità dell'unione di due insiemi finiti S e T disgiunti ($S \cap T = \varnothing$) è la somma delle cardinalità.

$$|S \cup T| = |S| + |T|, \quad S \cap T = \varnothing$$

Teorema (Principio del prodotto)

Dati due insiemi S_1, S_2 per cui $|S_1| = m$ e $|S_2| = n$ allora

$$|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Teorema (Principio della somma generalizzato)

Siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$ insiemi finiti a due a due disgiunti; allora

$$|S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|, \quad S_j \cap S_k = \varnothing, \quad 1 \leq j, k \leq n, j \neq k$$

Teorema (Principio del prodotto generalizzato)

Siano $S_1, S_2, \ldots, S_n$ insiemi finiti; allora

$$|S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| = \prod_{i=1}^{n} |S_i|$$

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Soluzione dell'esercizio 1

- Ricordiamo che una permutazione di k elementi su un insieme generico S di n elementi è una qualsiasi *funzione iniettiva* $p_k : I_k \to S$, con I_k insieme dei k elementi da permutare

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Soluzione dell'esercizio 1

- Ricordiamo che una permutazione di k elementi su un insieme generico S di n elementi è una qualsiasi *funzione iniettiva* $p_k : I_k \to S$, con I_k insieme dei k elementi da permutare
- Se consideriamo $k = n$ la funzione in questione p verifica $p : S \to S$. Osserviamo che p può essere completamente definita tramite una tupla del tipo:

$$(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \in S^n$$

Esercizio 1

Dato un insieme S per il quale $|S| = n$, quante sono le possibili *permutazioni* dei suoi elementi?

Soluzione dell'esercizio 1

- Ricordiamo che una permutazione di k elementi su un insieme generico S di n elementi è una qualsiasi *funzione iniettiva* $p_k : I_k \to S$, con I_k insieme dei k elementi da permutare
- Se consideriamo $k = n$ la funzione in questione p verifica $p : S \to S$. Osserviamo che p può essere completamente definita tramite una tupla del tipo:

$$(p(s_1), \dots, p(s_n)) \in S^n$$

- Per essere iniettiva, $\forall x, y \in S.(x \neq y \Rightarrow p(x) \neq p(y))$, che è equivalente a dire che:

$$\forall i, j \in [1..n].(i \neq j \wedge p(s_i) \neq p(s_j))$$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$
- ...

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$
- ...
- Fissati $p(s_1), \ldots, p(s_{n-1})$, c'è 1 modo di scegliere $p(s_n)$

- Questo significa che ogni volta che si sceglie $p(i)$, il successivo elemento della tupla $p(i+1)$ deve essere *diverso* dal precedente. In altre parole, scelgo gli elementi della tupla in sottoinsiemi sempre più piccoli di S.
- Ci sono $|S|$ modi di scegliere $p(s_1)$
- Fissato $p(s_1)$, ci sono $|S|-1$ modi di scegliere $p(s_2)$
- Fissati $p(s_1), p(s_2)$, ci sono $|S|-2$ modi di scegliere $p(s_3)$
- ...
- Fissati $p(s_1), \ldots, p(s_{n-1})$, c'è 1 modo di scegliere $p(s_n)$
- Quindi l'elemento i-esimo della tupla viene scelto da un insieme $S_i \subseteq S$ di cardinalità $|S_i| = |S| - i + 1$

- È possibile quindi sfruttare il principio del prodotto generalizzato per ottenere la risposta cercata, infatti:

$$
\begin{aligned}
|P| &= |\,\{(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \mid \text{“}p \text{ è iniettiva”}\}\,| \\
&= |S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| \\
&= |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| \\
&= (|S| - 1 + 1) \cdot (|S| - 2 + 1) \cdot \ldots \cdot (|S| - n + 1) \\
&= n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1
\end{aligned}
$$

- È possibile quindi sfruttare il principio del prodotto generalizzato per ottenere la risposta cercata, infatti:

$$
\begin{aligned}
|P| &= |\,\{(p(s_1), \ldots, p(s_n)) \mid \text{“}p \text{ è iniettiva”}\}\,| \\
&= |S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n| \\
&= |S_1| \cdot |S_2| \cdot \ldots \cdot |S_n| \\
&= (|S| - 1 + 1) \cdot (|S| - 2 + 1) \cdot \ldots \cdot (|S| - n + 1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1
\end{aligned}
$$

In definitiva, ci sono $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$ possibili permutazioni su un insieme di n elementi.

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 2

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 2

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 2

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$
- Fissato p, il vice può essere scelto in $|S_2| = 5$ modi differenti

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 2

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$
- Fissato p, il vice può essere scelto in $|S_2| = 5$ modi differenti
- Fissati p, v rimane scegliere s in $|S_3| = 4$ modi

Esercizio 2

Dato un gruppo di 6 persone, in quanti modi è possibile scegliere un Presidente (p), un Vice-presidente (v) e un Segretario (s)?

Soluzione dell'esercizio 2

- Si può procedere in maniera analoga all'esercizio precedente. Infatti, il problema è riconducibile a quello di formare delle triple

$$(p, v, s) \in S_1 \times S_2 \times S_3$$

- S_1 costituisce l'insieme su cui scegliere un presidente, quindi $|S_1| = 6$
- Fissato p, il vice può essere scelto in $|S_2| = 5$ modi differenti
- Fissati p, v rimane scegliere s in $|S_3| = 4$ modi
- Per il principio del prodotto generalizzato, si ha

$$\begin{aligned} |S_1 \times S_2 \times S_3| &= |S_1| \cdot |S_2| \cdot |S_3| \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Sommario

1. Combinatoria
   - Principi (di somma e prodotto)
   - Fattoriale di un naturale
   - Permutazioni

Definizione (Fattoriale)

Si definisce **fattoriale** *di un numero naturale n, indicato con $n!$, il prodotto di tutti i naturali minori o uguali ad esso.*

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$$

Definizione (Fattoriale per ricorrenza)

Si può definire il fattoriale di un numero naturale n anche per **ricorrenza***:*

$$n! := \begin{cases} 1 & \textit{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \textit{se } n \geq 1 \end{cases}$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

- ragionando per ricorrenza invece, si ottiene:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$5! = 5 \cdot 4!$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

- ragionando per ricorrenza invece, si ottiene:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \end{aligned}$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

- ragionando per ricorrenza invece, si ottiene:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \end{aligned}$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

- ragionando per ricorrenza invece, si ottiene:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \end{aligned}$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

- ragionando per ricorrenza invece, si ottiene:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \end{aligned}$$

In base alle definizioni date, calcoliamo 5!:

- con la definizione per esteso, sappiamo che:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{5} i = 120$$

- ragionando per ricorrenza invece, si ottiene:

$$n! := \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \cdot 4! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

Esercizio 3

In quanti modi diversi è possibile anagrammare le seguenti parole?

1. base
2. logica
3. fattore
4. fattoriale
5. coefficiente

Provate! (5 minuti).

Soluzione dell'esercizio 3

- Per le prime due parole, la risposta è banale:

$$\pi(\text{base}) = 4!$$
$$\pi(\text{logica}) = 6!$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Per le prime due parole, la risposta è banale:

$$\pi(\text{base}) = 4!$$
$$\pi(\text{logica}) = 6!$$

- Cosa succede se ci sono delle lettere ripetute? Proviamo a numerare le lettere che compaiono più di una volta in 3:

$$\text{fattore} \to \text{fat}_1\text{t}_2\text{ore}$$

Soluzione dell'esercizio 3

- Per le prime due parole, la risposta è banale:

$$\pi(\text{base}) = 4!$$
$$\pi(\text{logica}) = 6!$$

- Cosa succede se ci sono delle lettere ripetute? Proviamo a numerare le lettere che compaiono più di una volta in 3:

$$\text{fattore} \to \text{fat}_1\text{t}_2\text{ore}$$

- Bisogna quindi evitare di contare permutazioni di questo tipo due volte:

$$\text{fat}_1\text{t}_2\text{ore}, \ \text{fat}_2\text{t}_1\text{ore}$$

- Ragioniamo in maniera duale: fissata una certa permutazione p, quante sono le versioni che posso generare permutando le lettere ripetute?

- Ragioniamo in maniera duale: fissata una certa permutazione p, quante sono le versioni che posso generare permutando le lettere ripetute?
- In *fattore* la lettera t si ripete 2 volte; quindi per ogni permutazione esistono due versioni equivalenti della stessa parola:

$$\mathrm{t_1 t_2 faore},\ \mathrm{t_2 t_1 faore}$$
$$\mathrm{f t_1 t_2 aore},\ \mathrm{f t_2 t_1 aore}$$
$$\mathrm{f t_1 a t_2 ore},\ \mathrm{f t_2 a t_1 ore}$$
$$\dots$$

- Ragioniamo in maniera duale: fissata una certa permutazione p, quante sono le versioni che posso generare permutando le lettere ripetute?
- In *fattore* la lettera t si ripete 2 volte; quindi per ogni permutazione esistono due versioni equivalenti della stessa parola:

$$\begin{gathered}\mathrm{t_1t_2faore},\ \mathrm{t_2t_1faore}\\ \mathrm{ft_1t_2aore},\ \mathrm{ft_2t_1aore}\\ \mathrm{ft_1at_2ore},\ \mathrm{ft_2at_1ore}\\ \dots\end{gathered}$$

- Per calcolare le *permutazioni con ripetizione* basta dunque eliminare la metà dei casi:

$$\pi(\text{fattore}) = \frac{7!}{2}$$

- In *fattoriale* sia la *t* che la *a* si ripetono 2 volte; si ragiona in modo analogo al caso precedente, considerando che per ogni anagramma esistono $2 \cdot 2$ versioni equivalenti:

$$\pi(\text{fattoriale}) = \frac{10!}{2 \cdot 2}$$

- In *fattoriale* sia la t che la a si ripetono 2 volte; si ragiona in modo analogo al caso precedente, considerando che per ogni anagramma esistono $2 \cdot 2$ versioni equivalenti:

$$\pi(\text{fattoriale}) = \frac{10!}{2 \cdot 2}$$

- L'ultimo caso è leggermente differente. In *coefficiente* ci sono 3 ripetizioni di e, 2 ripetizioni di c, 2 ripetizioni di f e 2 di i.

- In *fattoriale* sia la t che la a si ripetono 2 volte; si ragiona in modo analogo al caso precedente, considerando che per ogni anagramma esistono $2 \cdot 2$ versioni equivalenti:

$$\pi(\text{fattoriale}) = \frac{10!}{2 \cdot 2}$$

- L'ultimo caso è leggermente differente. In *coefficiente* ci sono 3 ripetizioni di e, 2 ripetizioni di c, 2 ripetizioni di f e 2 di i.
- Numerando le lettere ripetute, si nota che per ogni anagramma esistono $3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$ versioni equivalenti. Ne deriva che:

$$\pi(\text{coefficiente}) = \frac{12!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$$

Sommario

1. Combinatoria
   - Principi (di somma e prodotto)
   - Fattoriale di un naturale
   - Permutazioni

Definizione (Permutazioni semplici)

Sia n la lunghezza di una stringa su di un alfabeto. Il numero di **permutazioni semplici** *P_n è*

$$P_n := n!$$

Definizione (Permutazioni con ripetizione)

Sia n la lunghezza di una stringa su di un alfabeto e siano $n_1, \ldots, n_k$ le ripetizioni dei k caratteri distinti che la compongono. Il numero di **permutazioni con ripetizione** *$P_n^{n_1,\ldots,n_k}$ è*

$$P_n^{n_1,\ldots,n_k} := \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

con $n_1 + \ldots + n_k = n$, $k \leq n$.

Esercizio 4

Dato un lucchetto a combinazione di 3 cifre, ognuna delle quali può andare da 0 a 9, quante sono le combinazioni possibili?

Esercizio 4

Dato un lucchetto a combinazione di 3 cifre, ognuna delle quali può andare da 0 a 9, quante sono le combinazioni possibili?

Soluzione dell'esercizio 4

- Sfruttiamo il principio del prodotto generalizzato, considerando l'insieme S delle cifre da 0 a 9:

$$\begin{aligned} |S \times S \times S| &= |S|^3 \\ &= 10^3 \\ &= 1000 \end{aligned}$$

Esercizio 5

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Esercizio 5

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Soluzione dell'esercizio 5

- Scriviamo un generico numero che rispetti le condizioni date dal testo. Esso sarà una qualsiasi permutazione di:

$$ab1122, \quad a, b \in [1..9]$$

Esercizio 5

Quanti sono i numeri di 6 cifre che non contengono 0, hanno la cifra 1 almeno 2 volte e la cifra 2 almeno 2 volte?

Soluzione dell'esercizio 5

- Scriviamo un generico numero che rispetti le condizioni date dal testo. Esso sarà una qualsiasi permutazione di:

$$ab1122, \quad a, b \in [1..9]$$

- Se $a \neq b \wedge a, b > 2$ ci saranno

$$p_1 = \frac{6!}{2!2!} \cdot 7 \cdot 6 = 180 \cdot 42 = 7560$$

anagrammi differenti

- Se $a \neq b$ e soltanto uno tra i due è 1 oppure 2, allora ci saranno

$$p_2 = \underbrace{\frac{6!}{3!2!}}_{\text{soltanto un 1}} \cdot 7 + \underbrace{\frac{6!}{2!3!}}_{\text{soltanto un 2}} \cdot 7 = \frac{6!}{3!} \cdot 7 = 840$$

anagrammi differenti

- Se $a \neq b$ e soltanto uno tra i due è 1 oppure 2, allora ci saranno

$$p_2 = \underbrace{\frac{6!}{3!2!}}_{\text{soltanto un 1}} \cdot 7 + \underbrace{\frac{6!}{2!3!}}_{\text{soltanto un 2}} \cdot 7 = \frac{6!}{3!} \cdot 7 = 840$$

  anagrammi differenti
- Se $a \neq b \wedge a, b < 2$ allora ci saranno

$$p_3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6!}{(3!)^2} = 20$$

  anagrammi differenti

- Se $a = b \wedge a > 2$ allora ci saranno

$$p_4 = \frac{6!}{2!2!2!} \cdot 7 = 630$$

anagrammi differenti

- Se $a = b \wedge a > 2$ allora ci saranno

$$p_4 = \frac{6!}{2!2!2!} \cdot 7 = 630$$

anagrammi differenti
- Se $a = b \wedge (a = 1 \vee a = 2)$ allora ci saranno

$$p_5 = \underbrace{\frac{6!}{4!2!}}_{\text{entrambi 1}} + \underbrace{\frac{6!}{2!4!}}_{\text{entrambi 2}} = \frac{6!}{4!} = 30$$

anagrammi differenti

- Se $a = b \land a > 2$ allora ci saranno

$$p_4 = \frac{6!}{2!2!2!} \cdot 7 = 630$$

  anagrammi differenti

- Se $a = b \land (a = 1 \lor a = 2)$ allora ci saranno

$$p_5 = \underbrace{\frac{6!}{4!2!}}_{\text{entrambi 1}} + \underbrace{\frac{6!}{2!4!}}_{\text{entrambi 2}} = \frac{6!}{4!} = 30$$

  anagrammi differenti

- Per il principio della somma generalizzato, basta sommare il numero di anagrammi delle varie casistiche ottenute (sono a due a due disgiunte):

$$\sum_{i=1}^{5} p_i = 7560 + 840 + 20 + 630 + 30 = 9080$$

Esercizio 6

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 2 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Esercizio 6

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 2 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Soluzione dell'esercizio 6

- La risposta segue banalmente dal teorema del prodotto generalizzato. Posso contarli trovando il numero di triple

$$(s, p, m) \in S_s \times S_p \times S_m$$

Esercizio 6

Ho a disposizione 2 paia di scarpe, 2 pantaloni e 5 magliette. In quanti modi diversi mi posso vestire?

Soluzione dell'esercizio 6

- La risposta segue banalmente dal teorema del prodotto generalizzato. Posso contarli trovando il numero di triple

$$(s, p, m) \in S_s \times S_p \times S_m$$

- Sapendo che $|S_s| = 2, |S_p| = 2, |S_m| = 5$ si ottiene:

$$\begin{aligned} |S_s \times S_p \times S_m| &= |S_s| \cdot |S_p| \cdot |S_m| \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Esercizio 7

Si hanno a disposizione 5 sedie e 7 colori.

1. In quanti modi possiamo colorare le sedie se tutte le sedie devono avere colori diversi?
2. In quanti modi possiamo colorare le sedie se lo stesso colore può essere usato per colorare più sedie (eventualmente tutte)?

Provate (5 minuti)

Soluzione dell'esercizio 7

(1) In quanti modi possiamo colorare le sedie se tutte le sedie devono avere colori diversi?

- Supponiamo di ordinare le sedie; a questo punto basta imporre che ogni colore nella quintupla $(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ sia diverso dagli altri. Saranno possibili

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7!}{(7-5)!} = 2520$$

colorazioni.

Soluzione dell'esercizio 7

(2) In quanti modi possiamo colorare le sedie se lo stesso colore può essere usato per colorare più sedie (eventualmente tutte)?

- Diversamente dal quesito precedente, ad ogni scelta posso utilizzare tutti i colori disponibili. Saranno possibili

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = 16807$$

colorazioni.

Esercizio 8

Se abbiamo 4 monete da 10 centesimi, 3 monete da 20 centesimi e 2 monete da 50 centesimi, in quanti modi possiamo scegliere monete in modo da formare 1 euro? Il tutto dipende da come scegliamo le monete da 50 centesimi.

Esercizio 8

Se abbiamo 4 monete da 10 centesimi, 3 monete da 20 centesimi e 2 monete da 50 centesimi, in quanti modi possiamo scegliere monete in modo da formare 1 euro? Il tutto dipende da come scegliamo le monete da 50 centesimi.

Soluzione dell'esercizio 8

- Il problema è equivalente a formare delle triple (m_{50}, m_{20}, m_{10}) in modo da rispettare i seguenti vincoli:

$$\begin{cases} m_{50} \cdot 0.50 + m_{20} \cdot 0.20 + m_{10} \cdot 0.10 = 1 \\ m_{50} \in [0..2] \\ m_{20} \in [0..3] \\ m_{10} \in [0..4] \end{cases}$$

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 1 moneta da 20 cent. ($m_{20} = 1$) e 3 monete da 10 cent. ($m_{10} = 3$)

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 1 moneta da 20 cent. ($m_{20} = 1$) e 3 monete da 10 cent. ($m_{10} = 3$)
- Se scelgo 0 monete da 50 cent. ($m_{50} = 0$), devo scegliere tutte le monete da 20 cent. ($m_{20} = 3$) e tutte le monete da 10 cent. ($m_{10} = 4$)

- Se scelgo 2 monete da 50 cent. ($m_{50} = 2$), necessariamente $m_{20} = m_{10} = 0$
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 2 monete da 20 cent. ($m_{20} = 2$) e 1 moneta da 10 cent. ($m_{10} = 1$)
- Se scelgo 1 moneta da 50 cent. ($m_{50} = 1$), potrei scegliere 1 moneta da 20 cent. ($m_{20} = 1$) e 3 monete da 10 cent. ($m_{10} = 3$)
- Se scelgo 0 monete da 50 cent. ($m_{50} = 0$), devo scegliere tutte le monete da 20 cent. ($m_{20} = 3$) e tutte le monete da 10 cent. ($m_{10} = 4$)

Quindi ci sono 4 modi di formare 1 euro:

$$\{(2, 0, 0), (1, 2, 1), (1, 1, 3), (0, 3, 4)\}$$