Tutorato di Logica - Lezione 2

Manuel Di Agostino

Università di Parma

21 ottobre 2024

Sommario

Sommario

Definizione (Rel. d'ordine)

*Data una relazione $R \subseteq A \times A$, essa si dice essere d'***ordine** *sse*

- **riflessiva**: $\forall x \in A.(xRx)$
- **anti-simmetrica**: $\forall x, y \in A.(xRy \land yRx \Rightarrow x = y)$
- **transitiva**: $\forall x, y, z \in A.(xRy \land yRz \Rightarrow xRz)$

Esercizio 1 Appello del 23/01/2024

Si consideri l'insieme $D_{28} = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\}$ dei divisori di 28 a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D_{28}.R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$

1. R su D_{28} è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali? *Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su D_{28} è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x.$$

Soluzione dell'esercizio 1

(1) R su D_{28} è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x|x.$$

- anti-simmetricità:

$$\begin{aligned}
xRy \wedge yRx &\Leftrightarrow x|y \wedge y|x && \text{(Def. di } R\text{)} \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge x = jy && \text{(Def. di '|')} \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : y = ijy \wedge x = jy \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : 1 = ij \wedge x = jy \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : (i = j = \pm 1) \wedge x = jy \\
&\Rightarrow (x = -y) \vee (x = y) \\
&\Rightarrow x = y. && (x, y > 0)
\end{aligned}$$

- transitività:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\ &\Leftrightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\ &\Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx && (k = ji \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x|z \\ &\Leftrightarrow xRz. \end{aligned}$$

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\
&\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\
&\Rightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\
&\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx && (k = ji \in \mathbb{Z}) \\
&\Leftrightarrow x|z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è d'ordine.

- transitività:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x|y \wedge y|z \\ &\Leftrightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : y = ix \wedge z = jy \\ &\Rightarrow \exists i,j \in \mathbb{Z} : z = j(ix) \\ &\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : z = kx && (k = ji \in \mathbb{Z}) \\ &\Leftrightarrow x|z \\ &\Leftrightarrow xRz. \end{aligned}$$

Quindi R è d'ordine.

- È totale? No, $4 \not R 7 \wedge 7 \not R 4$.

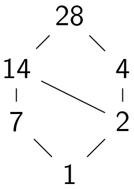
Soluzione dell'esercizio 1

(2) R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

Soluzione dell'esercizio 1

(2) R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

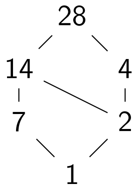
- Iniziamo costruendo il diagramma di Hasse che descrive R su D_{28}:



Soluzione dell'esercizio 1

(2) R su D_{28} ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D_{28}

- Iniziamo costruendo il diagramma di Hasse che descrive R su D_{28}:



- È evidente che esiste un massimo, 28, e un minimo, 1.

Esercizio 2 Appello del 05/06/2024

Si consideri l'insieme $D = \{2, 11, 23, 44, 1012, 2024\}$, a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|$ si legge "x divide y", ovver $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

1. R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
   Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.

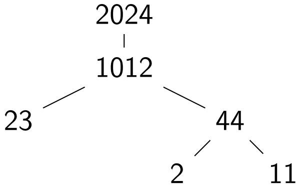
Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.
(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.
(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

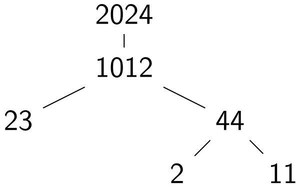
- Costruiamo il diagramma di Hasse:



Soluzione dell'esercizio 2

(1) R su D è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio.
(2) R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?
Suggerimento: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D dove può essere utile ricordare che $23 \cdot 24 = 1012$.

- Costruiamo il diagramma di Hasse:



- Massimo: 2024, minimali: $\{2, 11, 23\}$

Esercizio 3 Appello del 09/01/2024

Si consideri l'insieme $P = \{x | \exists n \in \mathbb{N} : x = 2^n\} = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$, delle potenze di 2, a cui si applica la relazione R così definita: relazione R così definita:

$$\forall x, y \in P : R(x, y) \Leftrightarrow x | y$$

si ricorda che $x|$ si legge "x divide y", ovver $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

1. R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
2. R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Soluzione dell'esercizio 3

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?

Soluzione dell'esercizio 3

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \vee yRx. \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 3

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \land y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \land x|y) \lor (n \geq m \land y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \lor yRx. \end{aligned}$$

(2) R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Soluzione dell'esercizio 3

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \vee yRx. \end{aligned}$$

(2) R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Costruiamo il diagramma di Hasse:

$$1 \;\text{———}\; 2 \;\text{———}\; 4 \;\text{———}\; 8 \;\text{———}\; 16 \;\text{———}\; \cdots$$

Soluzione dell'esercizio 3

(1) R su P è una relazione d'ordine? Se sì, è parziale o totale?
Analogo al precedente esercizio. Si noti però che è totale; infatti:

$$\begin{aligned} x, y \in P &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N} : x = 2^n \wedge y = 2^m \\ &\Rightarrow (m \geq n \wedge x|y) \vee (n \geq m \wedge y|x) \\ &\Leftrightarrow xRy \vee yRx. \end{aligned}$$

(2) R su P ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- Costruiamo il diagramma di Hasse:

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 16 \longrightarrow \cdots$$

- Minimo: 1, massimali: $\varnothing$

Esercizio 4

Si consideri l'insieme $A = \{a, b, c\}$. Sia R una relazione su $\wp(A)$ così definita:

$$\forall x, y \subseteq A : R(x, y) \Leftrightarrow x \subseteq y$$

1. R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?
2. R su $\wp(A)$ ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

Soluzione dell'esercizio 4

(1) R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?

Soluzione dell'esercizio 4

(1) R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \subseteq x.$$

Soluzione dell'esercizio 4

(1) R è d'ordine su $\wp(A)$? Se sì, è totale o parziale?

- riflessività:

$$xRx \Leftrightarrow x \subseteq x.$$

- anti-simmetricità:

$$\begin{aligned} xRy \wedge yRx &\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq x \\ &\Leftrightarrow x = y. \qquad (A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio 4

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \land yRz &\Leftrightarrow x \subseteq y \land y \subseteq z \\
&\Leftrightarrow \forall i \in x.(i \in y) \land \forall j \in y.(j \in z) \\
&\Rightarrow \forall i \in x.(i \in z) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

Quindi R è d'ordine su $\wp(A)$.

Soluzione dell'esercizio 4

- transitività:

$$
\begin{aligned}
xRy \wedge yRz &\Leftrightarrow x \subseteq y \wedge y \subseteq z \\
&\Leftrightarrow \forall i \in x.(i \in y) \wedge \forall j \in y.(j \in z) \\
&\Rightarrow \forall i \in x.(i \in z) \\
&\Leftrightarrow x \subseteq z \\
&\Leftrightarrow xRz.
\end{aligned}
$$

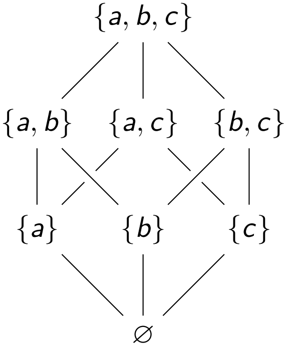
Quindi R è d'ordine su $\wp(A)$.

- È totale? No, $\{b\} \not\subseteq \{a, c\} \wedge \{a, c\} \not\subseteq \{b\}$

Soluzione dell'esercizio 4

(2) R su $\wp(A)$ ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

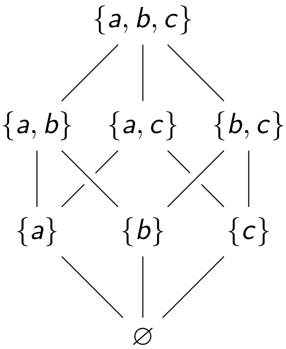
- diagramma di Hasse:



Soluzione dell'esercizio 4

(2) R su $\wp(A)$ ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

- diagramma di Hasse:



- Minimo: $\varnothing$, massimo: $\{a, b, c\}$.

Sommario

Definizione (Principio d'induzione)

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. *Se*

- $0 \in A$
- $\forall a \in A.(S(a) \in A)$

allora $A \equiv \mathbb{N}$.

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
Perché funziona?

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
Perché funziona?

- Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} | \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
Perché funziona?

- Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} | \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow$ “$p(0)$ è vero”.

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
Perché funziona?

- Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} | \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow \text{“}p(0) \text{ è vero”}$.
- Verifico che $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$, che per definizione di P equivale a dire che $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$.

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
Perché funziona?

- Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} | \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow$ “$p(0)$ è vero”.
- Verifico che $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$, che per definizione di P equivale a dire che $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$.
- A questo punto, poiché vale il **principio di induzione**, posso affermare che $P = \mathbb{N}$. Per definizione di P, questo equivale a dire che $\forall n \in \mathbb{N}.(\text{“}p(x) \text{ è vero”})$.

Perché è utile? Ci permette di dimostrare che una certa proprietà è valida per tutti i numeri naturali.
Perché funziona?

- Sia p un certo predicato unario con dominio in $\mathbb{N}$ e sia $P = \{x \in \mathbb{N} | \text{“}p(x) \text{ è vero”}\}$ l'insieme degli interi per cui esso è verificato. Se dimostro che $P = \mathbb{N}$, posso affermare che p è vero $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Verifico che $0 \in P \Leftrightarrow$ “$p(0)$ è vero”.
- Verifico che $\forall n.(n \in P \Rightarrow n + 1 \in P)$, che per definizione di P equivale a dire che $\forall n.(p(n) \Rightarrow p(n + 1))$.
- A questo punto, poiché vale il **principio di induzione**, posso affermare che $P = \mathbb{N}$. Per definizione di P, questo equivale a dire che $\forall n \in \mathbb{N}.(\text{“}p(x) \text{ è vero”})$.

Notate che non ho specificato nulla sul predicato p.

Esercizio 5

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \tag{1}$$

Esercizio 5

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \tag{1}$$

Soluzione dell'esercizio 5

In questo caso, possiamo considerare

$$p(x) = \text{“la somma dei primi } x \text{ numeri interi pari è data da (1)”}$$

Esercizio 5

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{i=0}^{n} 2i = 0 + 2 + 4 + \ldots + 2n = n \cdot (n+1) \tag{1}$$

Soluzione dell'esercizio 5

In questo caso, possiamo considerare

$$p(x) = \text{"la somma dei primi } x \text{ numeri interi pari è data da (1)"}$$

Quindi:

- verifico che valga $p(0)$:

$$p(0) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{0} = 0 \quad = \quad 0 \cdot (0+1).$$

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora $p(n)$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) && \text{(ip. induttiva)} \\ &= (n+1) \cdot (n+2). && \text{(prop. distributiva).} \end{aligned}$$

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora $p(n)$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\
&= n(n+1) + 2(n+1) && \text{(ip. induttiva)} \\
&= (n+1) \cdot (n+2). && \text{(prop. distributiva).}
\end{aligned}$$

il che equivale a dire che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

- ora devo verificare che se $p(n)$ vero per un certo n, allora $p(n+1)$ è vero. Scriviamo cos'è $p(n+1)$:

$$p(n+1) \equiv \sum_{i=0}^{n+1} 2i = (n+1) \cdot (n+2)$$

Supponiamo allora $p(n)$ e osserviamo che:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} 2i &= \sum_{i=0}^{n} 2i + 2(n+1) \\ &= n(n+1) + 2(n+1) && \text{(ip. induttiva)} \\ &= (n+1) \cdot (n+2). && \text{(prop. distributiva).} \end{aligned}$$

il che equivale a dire che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Per il principio di induzione, (1) è vera $\forall n \in \mathbb{N}$. $\square$

Esercizio 6

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \tag{2}$$

Esercizio 6

Dimostrare per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1 = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \tag{2}$$

Soluzione dell'esercizio 6

- caso base, stavolta $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} 2i - 1 = 2 - 1 = 1 \quad = \quad (1)^2.$$

- passo induttivo, suppongo che per un qualche intero n valga (2); allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i - 1 &= \sum_{i=1}^{n} 2i - 1 + [2(n+1) - 1] \qquad \text{(ip. induttiva)} \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

- passo induttivo, suppongo che per un qualche intero n valga (2); allora:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i-1 &= \sum_{i=1}^{n} 2i-1+[2(n+1)-1] && \text{(ip. induttiva)}\\ &= n^2+2n+1\\ &= (n+1)^2.\end{aligned}$$

Per il principio di induzione, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vale: (2). $\square$