Ex 2

$R := \forall x,y \in \mathbb{N} : R(x,y) \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$

N.B. si può scrivere $x \equiv_5 y$ e si legge "x congruo a y modulo 5"

- RIFLESSIVA :

$x R x \Leftrightarrow \underbrace{x \bmod 5}_{:= a \in \mathbb{N}} = x \bmod 5 \Leftrightarrow a = a \leftarrow$ Chiaramente vero, '=' e' di equivalenza!

- SIMMETRICA :

$x,y \in \mathbb{N},\ xRy \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5$ (swap)
$\Leftrightarrow y \bmod 5 = x \bmod 5$
$\Leftrightarrow y R x$.

'=' simmetrica

- TRANSITIVA :

$x,y,z \in \mathbb{N},\ xRy, yRz \Leftrightarrow x \bmod 5 = y \bmod 5 \wedge y \bmod 5 = z \bmod 5$ '=' transitiva
$\Rightarrow x \bmod 5 = z \bmod 5$
$\Leftrightarrow x R z$

Quindi R e' di equivalenza.

2) Si ottengono 5 classi di equivalenza, corrispondenti ai rispettivi resti possibili dividendo un intero per 5.

$\forall x,y, r_x, r_y \in \mathbb{N}. \exists i,j \in \mathbb{Z} : x = 5i + r_1 \wedge y = 5j + r_2$
In base alla def. di R, $xRy \Leftrightarrow r_1 = r_2$
Gli unici casi possibili sono che il resto sia in $\{0,1,2,3,4\}$.

Ex.3

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$R := \forall x,y \in \mathbb{R}^* : R(x,y) \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \left(\frac{x}{y} = q \wedge q \neq 0\right)$

- RIFLESSIVA

$xRx \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \left(\frac{x}{x} = q \wedge q \neq 0\right)$
$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : (1 = q \wedge q \neq 0)$
$\Leftrightarrow 1$.

N.B.

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \not{R} \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \pi R 2\pi$

$\frac{4}{5} = \frac{4}{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow 4 R 5$

- SIMMETRICA

$xRy \Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = q \wedge q \neq 0$
$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = (q)^{-1} \wedge q \neq 0$
$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : \frac{y}{x} = \underbrace{\frac{1}{q}}_{\in \mathbb{Q}} \wedge q \neq 0 \xRightarrow{q' = 1/q} \exists q' \in \mathbb{Q} : \frac{y}{x} = q' \wedge q' \neq 0 \Leftrightarrow yRx$.

- TRANSITIVA

$xRy, yRz \Leftrightarrow \exists a,b \in \mathbb{Q} : \frac{x}{y} = a, \frac{y}{z} = b, \ a,b \neq 0$
$\xRightarrow{y = bz} \exists a,b \in \mathbb{Q} : \frac{x}{zb} = a, \ a,b \neq 0 \xRightarrow{c = ab} \exists c \in \mathbb{Q} : c \neq 0 \wedge \frac{x}{z} = c$

Ex 4 $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$R := \quad \forall\, (a,b),(c,d) \in A : R((a,b),(c,d)) \Leftrightarrow ad = cb \quad , \; A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

- RIFLESSIVA

$$\underbrace{(a,b)}_{x \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} R (a,b) \Leftrightarrow ab = ba \Leftrightarrow ab \overset{\text{comm.}}{=} ab \Leftrightarrow 1 \, .$$

- SIMMETRICA

$$(a,b) R (c,d) \Leftrightarrow ad = bc \overset{\text{'=' simm.}}{\Leftrightarrow} bc = ad \overset{\text{'·' comm.}}{\Leftrightarrow} cb = da \Leftrightarrow (c,d) R (a,b) \, .$$

- TRANSITIVA

OBIETTIVO: $xRz \Leftrightarrow (a,b) R (e,f) \Leftrightarrow af = be$

$$\underbrace{(a,b) R (c,d)}_{x\,R\,y} , \underbrace{(c,d) R (e,f)}_{y\,R\,z} \Leftrightarrow ad = bc \wedge cf = de$$

$$\Rightarrow ad \cdot f \overset{(*)}{=} bc \cdot f \wedge cf = de \qquad (*) \; \text{'} x = y \Leftrightarrow xk = yk \text{'}$$

$$\Leftrightarrow adf = b(cf) \wedge cf = de$$

$$\Rightarrow adf = bde$$

$$\Rightarrow af \overset{(*)}{=} be$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a,b)}_{x} \underbrace{R}_{R} \underbrace{(e,f)}_{z} \, .$$

EX. 5

- $\neg R(a,b) \; , \; \neg R(b,c) \; , \; \neg R(a,c)$
- $A_1 = \{x \in A \mid R(a,x)\} , A_2 = \{x \in A \mid R(b,x)\} , A_3 = \{x \in A \mid R(c,x)\}$
- $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

1.1 DIMOSTRO CHE CIÒ COMPORTA $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ (TESI)

- Supponiamo per assurdo che $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, ossia $\exists x \in A .\, x \in A_1 \cap A_2$; si ottiene

$$\exists x \in A .\, x \in A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow \exists x .\, x \in A \wedge x \in A_1 \wedge x \in A_2$$

$$\Leftrightarrow \exists x .\, x \in A \wedge R(a,x) \wedge R(b,x)$$

$$\Rightarrow \exists x .\, x \in A \wedge R(a,x) \wedge R(x,b)$$

$$\Rightarrow \exists x .\, x \in A \wedge R(a,b) \;\; \lightning$$

def. di A_1, A_2
R è simmetrica
R è transitiva

Non è mai vero che $R(a,b)$ per ipotesi

Poiché giungiamo ad un assurdo, vale la tesi, ossia $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

1.2, 1.3: Analogamente si dimostra che $A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

EX. 6

- $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- A_1, A_2, A_3 non vuoti e disgiunti a due a due.
- $R := \forall x,y \in A \,.\, R(x,y) \Leftrightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i$.

1. DIMOSTRO R DI EQUIVALENZA

· RIFLESSIVA

$$R(x,x) \Leftrightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i \wedge x \in A_i$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i$$

sicuramente è vera in quanto

$$x \in A \Leftrightarrow x \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$$
$$\Leftrightarrow x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee x \in A_3$$

· SIMMETRICA

$$R(x,y) \Leftrightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i$$
$$\Leftrightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : y \in A_i \wedge x \in A_i$$
$$\Leftrightarrow R(y,x)$$

'$\wedge$' comm.

quindi $\forall x . (R(x,y)) \Rightarrow \forall x (R(y,x))$.

· TRANSITIVA

$$R(x,y) \wedge R(y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i \\ \exists j \in \{1,2,3\} : y \in A_j \wedge z \in A_j \end{cases}$$
$$\Rightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i \wedge y \in A_i \wedge z \in A_i$$
$$\Rightarrow \exists i \in \{1,2,3\} : x \in A_i \wedge z \in A_i$$
$$\Leftrightarrow R(x,z).$$

deve essere $i = j$ poichè se $i \neq j$, per ipotesi $A_i \cap A_j = \emptyset$; quindi $y \in A_i \cap A_j \Rightarrow i = j$.

Quindi R è di equivalenza.