Tutorato di Logica - Lezione 2

Manuel Di Agostino

Università di Parma

7 ottobre 2024

Sommario

1. Insiemistica
   - Relazioni di base
   - Operazioni tra insiemi
   - Esercizi
   - Insieme prodotto
   - Esercizi
2. Relazioni e funzioni
   - Defizioni
   - Esercizi

Sommario

Esistono alcune relazioni di base tra gli insiemi.

Definizione (Relazione di appartenenza)

Dato un insieme A si ha che

$$x \in A \equiv \mathcal{B}(x, A) \equiv \text{“}x \textit{ appartiene all'insieme } A\text{”}$$

Definizione (Relazione di inclusione)

Dati due insiemi A, B si ha che

$$A \subseteq B \equiv \mathcal{I}(A, B) \equiv \forall x.(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Definizione (Relazione di uguaglianza)

Dati due insiemi A, B si ha che

$$A = B \equiv \mathcal{E}(A, B) \equiv \forall x.(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Sommario

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

- $A_3 = \wp(A_1)$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$

$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

- $A_2 = \{\varnothing\}$

$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$

- $A_3 = \wp(A_1)$

$$\wp(A_3) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \dots, \wp(A_1)\}$$

Definizione (Insieme delle parti, *Powerset*)

Dato un insieme A, il suo **insieme delle parti** $\wp(A)$ *è definito come*

$$\wp(A) := \{x : x \subseteq A\}$$

Ad esempio:

- $A_1 = \{a, b, c\}$
$$\wp(A_1) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$
- $A_2 = \{\varnothing\}$
$$\wp(A_2) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
- $A_3 = \wp(A_1)$
$$\wp(A_3) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{c\}\}, \ldots, \wp(A_1)\}$$
$$|\wp(A_3)| = 2^{|\wp(A_1)|} = 2^{2^3} = 256$$

Definizione (Intersezione)

Dati due insiemi A, B *definiamo*

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Definizione (Unione)

Dati due insiemi A, B *definiamo*

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

Definizione (Complementare)

Dato un insieme A *definiamo*

$$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$$

Definizione (Differenza)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$

Definizione (Differenza simmetrica)

Dati due insiemi A, B definiamo

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Proprietà

- *Idempotenza:*
$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A$$
- *Commutativa:*
$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$
- *Associativa:*
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cap C)$$
- *Distributiva:*
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Proprietà

- *Assorbimento:*

$$A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A$$

- *De Morgan:*

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Sommario

Esercizio 1

Dimostrare formalmente le seguenti identità.

1. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
2. $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
3. $\overline{\mathcal{T}} = \varnothing, \quad \overline{\varnothing} = \mathcal{T}$
4. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$
5. $A \subseteq (A \cup B)$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
7. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$
8. $(A \cap B) \cup \overline{(A \cup \overline{B})} = B$
9. $A \triangle B = B \triangle A$

Sommario

Definizione (Insieme prodotto)

Dati due insiemi A, B *definiamo*

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \land b \in B\}$$

Definizione (Insieme prodotto generalizzato)

Dati k *insiemi* $A_1, \ldots, A_k$ *definiamo*

$$A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k) : \forall i.(1 \leq i \leq k \land a_i \in A_i)\}$$

Sommario

Esercizio 2

Siano A, B due insiemi non vuoti. Si considerino suddivisi in questo modo:

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ con } A_1 \cap A_2 = \varnothing$$
$$B = B_1 \cup B_2, \text{ con } B_1 \cap B_2 = \varnothing$$

e inoltre $A_i \neq \varnothing, B_i \neq \varnothing$ per $i = 1, 2$.
Si dimostri che:

$$A \times B \neq (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$$

Sommario

1. Insiemistica
   - Relazioni di base
   - Operazioni tra insiemi
   - Esercizi
   - Insieme prodotto
   - Esercizi

2. Relazioni e funzioni
   - Defizioni
   - Esercizi

Sommario

Definizione (Relazione)

Dati due insiemi A, B, una **relazione** $\mathcal{R}$ *tra essi è un qualsiasi sottoinsieme del loro prodotto cartesiano.*

$$\mathcal{R} \subseteq A \times B$$

Definizione (Funzione)

Una **funzione** $f : A \to B$ *è una relazione su* A, B

- **ovunque definita**: $\forall x \in A. \exists y \in B : (x, y) \in f$
- **funzionale**: $\forall x \in A. \exists$*al più* $y \in B : (x, y) \in f$

Proprietà (iniettività)

Una funzione $f : A \to B$ *è* **iniettiva** *sse*

$$\forall x_1 \in A.\forall x_2 \in A.(f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2) \equiv$$
$$\forall x_1 \in A.\forall x_2 \in A.(x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2))$$

Proprietà (suriettività)

Una funzione $f : A \to B$ *è* **suriettiva** *sse*

$$\forall y \in B.\exists x \in A : y = f(x)$$

Proprietà (biettività)

Una funzione $f : A \to B$ *è* **biettiva** *(biunivoca) sse*

$$\forall y \in B.\exists! x \in A : y = f(x)$$

Proprietà

Due insiemi A, B si dicono **equipotenti** *sse esiste una funzione $f : A \to B$ biunivoca.*

Sommario

Esercizio 3

Si classifichino (in termini di iniettività, suriettività e biettività) le seguenti funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$.

1. $f(n) = 42$
2. $f(n) = 2n$
3. $f(n) = 2n + 1$
4. $f(n) = n^2$

Esercizio 4

Siano A, B due insiemi non vuoti tali che $|A| = n$ e $|B| = k$. Si dimostri che il numero di funzioni $f : A \to B$ è k^n.