

Tutorato di Logica


Manuel Di Agostino



manueldiagostino.github.io

Qualche info utile

- Dove trovo le slide?

 Elly2024

 Unipr-org (<https://github.com/unipr-org/tutorati>)

- Per qualsiasi domanda:

 manuel.diagostino@studenti.unipr.it

Logica proposizionale

Connettivi logici di base: NOT

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Connettivi logici di base: **AND**

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Connettivi logici di base: **OR**

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

Alcuni capisaldi

- Principio del *terzo escluso*

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
0	1	1
1	0	1

- Principio di *non contraddizione*

p	$\neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
0	1	1
1	0	1

Tautologie

Proprietà

- commutativa

$$a \wedge b \equiv b \wedge a$$

$$a \vee b \equiv b \vee a$$

- associativa

$$a \wedge b \wedge c \equiv (a \wedge b) \wedge c \equiv a \wedge (b \wedge c)$$

$$a \vee b \vee c \equiv (a \vee b) \vee c \equiv a \vee (b \vee c)$$

- distributiva

$$(a \wedge b) \vee c \equiv (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

$$(a \vee b) \wedge c \equiv (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

Proprietà

- leggi di De Morgan

$$\neg(a \wedge b) \equiv (\neg a \vee \neg b)$$

$$\neg(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge \neg b)$$

Tutte queste proprietà si possono dimostrare utilizzando le *tavole di verità* (esercizio).

Proposizione *contronominale*

Possiamo applicare le proprietà viste finora all'*implicazione logica*:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$\equiv \neg p \vee \neg\neg q$$

$$\equiv \neg(\neg q) \vee \neg p$$

$$\equiv \neg q \Rightarrow \neg p .$$

[idempotenza di $\neg\neg$]

[commutatività di \vee]

Esercizi, tavole di verità

1. $a \wedge (b \Rightarrow a)$

2. $(a \Rightarrow b) \wedge ((c \Leftrightarrow \neg a) \vee b)$

3. $(a \wedge (a \Rightarrow b)) \Rightarrow b$

4. $(a \Leftrightarrow a) \Rightarrow (b \Leftrightarrow \neg b)$

Proviamo!

Esercizio: proposizione dalla tabella di verità

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Esercizio: proposizione dalla tabella di verità

p	q	$p \implies q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

$$\begin{array}{l} \text{DNF} \\ (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv \\ \hline (\neg p \vee q) \\ \text{CNF} \end{array}$$

Esercizio: equivalenza tra le due forme

$$\begin{aligned} \underline{(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)} &\equiv (p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (q \vee \neg q)) \\ &\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p) \\ &\equiv (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg p) \\ &\equiv (q \vee \neg p) \\ &\equiv \underline{(\neg p \vee q)}. \end{aligned}$$

Quantificatori: negazione

$$\neg(\forall x. p(x)) \equiv \exists x : \neg p(x)$$
$$\neg(\exists x : p(x)) \equiv \forall x. \neg p(x)$$

La prima equivale a esibire un *controesempio* per confutare un enunciato:

- “*Il quadrato di un intero è sempre pari.*” \rightarrow falso, **esiste** il numero 5 il cui quadrato è 25 (dispari).

Confutare le seguenti proposizioni:

1. $\forall n. “3n + 6 \geq 5n”$, dominio naturali

2. $\forall n. “10n^2 > n^3”$, dominio naturali

3. $\forall n. “-\frac{3}{56}n + 2 > e^{\frac{n^2}{577}}”$, dominio naturali

* In questi casi meglio farsi aiutare dal PC :)

Insiemistica

Definizione tramite *proprietà*

$$S := \{x : p(x)\} \equiv \forall x. (x \in S \Leftrightarrow p(x))$$

Si hanno inoltre le seguenti definizioni (sono proposizioni!):

$$\forall x \in S. p(x) \equiv \forall x. (x \in S \Rightarrow p(x))$$

$$\exists x \in S : p(x) \equiv \exists x : (x \in S \wedge p(x))$$

Grazie ad esse possiamo dimostrare che:

$$\neg(\forall x \in S. p(x)) \equiv \exists x \in S : \neg p(x)$$

$$\neg(\exists x \in S : p(x)) \equiv \forall x \in S. \neg p(x)$$