Esercizi

Esame di Elementi di Logica e Strutture Discrete

Corso di Laurea in Informatica

Appello del 14·01·2025

Nome: __________________________________
Cognome: __________________________________
Matricola: __________________________________

Esercizio 1. (5 punti) Sia $D = (\mathbf{N} \setminus \{0\}) \times (\mathbf{N} \setminus \{0\})$ l'insieme delle coppie di numeri naturali, in cui si è escluso lo zero. Supponiamo di applicare a D la relazione di proporzionalità R così definita:

$$\forall (a, b), (c, d) \in D : R((a, b), (c, d)) \Leftrightarrow ad = bc$$

Dimostrare che la relazione R è di equivalenza.

Esercizio 2. (4 punti) Si consideri l'insieme $D = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30, 60\}$ a cui si applica la relazione R così definita:

$$\forall x, y \in D : R(x, y) \Leftrightarrow x|y$$

si ricorda che $x|y$ si legge "x divide y", ovvero $\exists m \in \mathbb{Z} : y = mx$.

- R su D è una relazione di ordine? Se sì, è parziale o totale?
- R su D ha elementi minimali e massimali? Se sì, quali?

(*Suggerimento*: rappresentare graficamente la relazione R sull'insieme D.)

Esercizio 3. (4 punti) Dimostrare per induzione la seguente uguaglianza.

$$\sum_{i=0}^{n} 2 \cdot \frac{1}{3^i} = \frac{3^{n+1} - 1}{3^n}$$

Chi dovesse effettuare solo il secondo parziale dovrà svolgere solo gli esercizi di seguito.

Esercizio 4. (5 punti - 9 punti) Usando la definizione di interpretazione $v : \text{FBF} \to \{0, 1\}$ per la logica proposizionale, dimostrare che:

$$\models \neg((x \wedge \neg y) \vee (y \vee \neg x)) \Rightarrow z$$

Successivamente, scrivere la tavola di verità della formula $(x \wedge \neg y) \vee (y \vee \neg x)$.

Esercizio 5. (5 punti - 10 punti) Usando il metodo di deduzione naturale, dimostrare che:

$$\vdash \neg p \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$$

(*Suggerimento*: utilizzare opportunamente la regola di eliminazione dell'$\vee$.)

Esercizio 6. (4 punti - 8 punti) Definire induttivamente l'insieme delle variabili libere $FV(P)$ per i termini $t \in \text{TER}$ e per le formule ben formate $P \in \text{FBF}$ della logica del I ordine.