Principio di induzione

La definizione delle successioni mediante ricorsione suggerisce anche un metodo per la dimostrazione di particolari proprietà che dipendono da un numero naturale n.

ESEMPIO

Consideriamo la somma delle prime n potenze di 2, a partire da 2^0. Si può dimostrare che è uguale a $2^n - 1$.

Per esempio, se $n = 3$: $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$, $\quad 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$.

In generale: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

In modo sintetico la proprietà si scrive: $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$.

Il simbolo $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i$ si legge «sommatoria in i da 0 a $n - 1$ di 2^i» e indica la somma di tutte le potenze 2^i, con i che varia da 0 a $n - 1$.

Per dimostrare la proprietà, PER $n \geq 1$ procediamo mediante due passi. SE $n = 0$, LA SOMMA $\sum_{i=0}^{-1} 2^i$ NON HA SENSO: $-1 < 0$

Primo passo

Dimostriamo che la proprietà è vera per $n = 1$. Infatti, per $n = 1$, la somma si riduce a $2^0 = 1$, e anche $2^n - 1$ vale: $2^1 - 1 = 1$.

Secondo passo

Dimostriamo che, supponendo vera la proprietà per un generico valore n, essa risulta vera anche per $n + 1$, ossia per il valore successivo. Consideriamo quindi vera l'uguaglianza:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Aggiungiamo a entrambi i membri 2^n e riscriviamo:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^n = 2^n - 1 + 2^n,$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} + 2^{(n+1)-1} = 2 \cdot 2^n - 1,$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{(n+1)-1} = 2^{(n+1)} - 1.$$

Abbiamo dimostrato che la proprietà è vera per $n + 1$.

Conclusione

Se la proprietà è vera per $n = 1$ (primo passo), essa è vera anche per il valore successivo (secondo passo), ossia per $n = 2$; se è vera per $n = 2$, allora è vera per $n = 3$ e così via. Possiamo concludere che la proprietà è vera per n qualsiasi.

Questo metodo di dimostrazione si basa sul **principio di induzione**:

> data una proposizione $P(n)$, il cui enunciato dipende da n, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$, se
>
> **1.** è vera per $n = 1$,
>
> **2.** supposta vera per n, è vera anche per $n + 1$,
>
> allora la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

Più in generale, il principio di induzione è così formulato:

data una proposizione $P(n)$, con $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq k$, se

1. è vera $P(k)$,

2. supposta vera $P(n)$, è vera anche $P(n + 1)$,

allora $P(n)$ è vera per ogni $n \geq k$.

Esercizi

1 ESERCIZIO GUIDA Dimostriamo, applicando il principio di induzione, che:

$$1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + (5n - 4) = \frac{n}{2}(5n - 3),\ n \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Principio di induzione: data una proposizione P,
- dimostra che è vera per $n = 1$,
- dimostra che, se è vera per n, allora è vera per $n + 1$.

Puoi concludere che P è vera $\forall n \geq 1$.

Per $n = 1$ la proposizione è vera, infatti per $n = 1$ il primo membro è 1 e il secondo membro è $\frac{1}{2}(5 - 3) = 1$.

Supponiamo che la proposizione sia vera per n, dimostriamo allora che è vera anche per $n + 1$. Infatti il primo membro per $n + 1$ diventa:

$$\underline{1 + 6 + 11 + 16 + \ldots + (5n - 4)} + [5(n + 1) - 4] = \underline{\frac{n}{2}(5n - 3)} + [5n + 5 - 4] =$$

$$\frac{5}{2}n^2 - \frac{3}{2}n + 5n + 1 = \frac{5n^2 - 3n + 10n + 2}{2} = \frac{5n^2 + 7n + 2}{2}.$$

Il secondo membro per $n + 1$ è:

$$\frac{n + 1}{2}[5(n + 1) - 3] = \frac{n + 1}{2}(5n + 2) = \frac{5n^2 + 7n + 2}{2}.$$

La proposizione è quindi vera per $n + 1$.
Poiché la proposizione è vera per $n = 1$ e, supponendola vera per n, è vera anche per $n + 1$, allora, per il principio di induzione, la proposizione è vera per ogni $n \geq 1$.

ESPRIMERE LE SOMME CON IL SIMBOLO Σ :

Dimostra, mediante il principio di induzione, che sono vere le seguenti uguaglianze per $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

2 $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$

3 $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

4 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$

5 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2$

6 $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$

7 $5 + 10 + 15 + \ldots + 5n = \frac{5}{2}n(n + 1)$

8 $3 + 6 + 9 + \ldots + 3n = \frac{3}{2}n(n + 1)$

9 $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n}{2}(3n + 1)$

---

10 $1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \ldots + n(2n + 1) = \frac{1}{6}n(n + 1)(4n + 5)$

11 $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}n(2n - 1)(2n + 1)$

12 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n - 1) \cdot n = \frac{1}{3}n(n^2 - 1)$

13 $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n(n + 1)}{2(2n + 1)}$

---

14 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

15 $1 + 4 + 16 + 64 + \ldots + 4^{n-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

16 $\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{1}{7^n} = \frac{7^n - 1}{6 \cdot 7^n}$

17 $5 + 5^2 + 5^3 + \ldots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 5}{4}$

18 $\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$

19 $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n = 2(2^n - 1)$

20 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}$

21 $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

22 $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, $x \neq 1$.

Sommatorie

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

23 $\sum_{k=1}^{6}(2k-3)$, $\sum_{k=1}^{4}k^2$, $\sum_{k=1}^{3}(k+1)^3$.

24 $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{i(i+3)}$, $\sum_{i=3}^{7}(3i-6)^2$, $\sum_{i=-3}^{2}(2-i)^i$.

25 Scrivi per esteso: $\sum_{i=1}^{n}(i^3+1)$, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$, $\sum_{k=1}^{n}k(3k+1)$, $\sum_{i,k=1}^{n}ik$.

26 TEST L'espressione $\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{4}+\frac{16}{5}+\frac{25}{6}$ è uguale a:

A $\sum_{i=1}^{5}\frac{i^2}{i-1}$. B $\sum_{i=0}^{5}\frac{i^2}{i+1}$. ~~C~~ $\sum_{k=1}^{5}\frac{k^2}{1+k}$. D $\sum_{k=1}^{5}\frac{(k+1)^2}{k}$. E $\sum_{i=0}^{5}\frac{(i+1)^2}{i+1}$.

Esprimi le seguenti somme con il simbolo di sommatoria.

27 a. $\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\ldots+\frac{41}{40}$ b. $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{94}-\frac{1}{95}$

28 a. $2+\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x^4}+\frac{8}{x^6}+\ldots+\frac{88}{x^{86}}$ b. $3^1+4^2+5^3+6^4+\ldots+90^{88}$

Sommatorie e induzione

Dimostra che per $n \geq 1$ valgono le seguenti uguaglianze.

29 $\sum_{i=1}^{n}i(2i+1)=\frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$

30 $\sum_{k=1}^{n}3^k=\frac{1}{2}(3^{n+1}-3)$

31 $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k=\frac{5^n-1}{4\cdot 5^n}$

32 $\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

33 ESERCIZIO GUIDA Dimostriamo applicando il principio di induzione che $5^{2n}-2^n$ è multiplo di 23, per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

Per $n=1$ la proposizione è vera, infatti $5^{2n}-2^n$ in questo caso diventa $25-2=23$.
Supponiamo che essa sia vera per n, cioè supponiamo che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che:

$$5^{2n}-2^n=k\cdot 23, \qquad \text{ossia} \qquad 5^{2n}=23\cdot k+2^n;$$

dimostriamo allora che la proposizione è vera anche per $n+1$. Infatti:

$$5^{2(n+1)}-2^{n+1}=25\cdot 5^{2n}-2\cdot 2^n=25\cdot(23\cdot k+2^n)-2\cdot 2^n=25\cdot 23k+25\cdot 2^n-2\cdot 2^n=$$
$$2^n\cdot(25-2)+23\cdot k\cdot 25=23\cdot 2^n+23\cdot k\cdot 25=23\cdot(2^n+25\cdot k).$$

Ma $m=2^n+25\cdot k$ è un numero naturale, per cui possiamo dire che $5^{2(n+1)}-2^{n+1}$ è un multiplo di 23.
Allora, per il principio di induzione, la proposizione è vera per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

Applicando il principio di induzione dimostra le seguenti proprietà.

34 $4^{2n}-3^n$ è multiplo di 13 per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

35 10^n-1 è divisibile per 9 per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

36 n^3+3n^2+5n è divisibile per 3 per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

37 $3^{2n+1}+2^{n+2}$ è multiplo di 7 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

38 21 divide $4^{n+1}+5^{2n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

39 $2n \leq 2^n$, $n \in \mathbb{N}-\{0\}$.

40 Dimostra che $n^2>2n+1$ per ogni $n>2$.

41 Dimostra che $(1+x)^n \geq 1+nx$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x>-1$.