

# SEMANTICA

Def: Si dice **VALUTAZIONE** ogni funzione

$$v: FBF \longrightarrow \{0,1\} \quad \text{dove } 0 \text{ e } 1 \text{ si dicono}$$

**VALORI di VERITA'**

$$B = \{0,1\} \quad \text{valori BOOLEANI}$$

$\uparrow$  **FALSO**       $\uparrow$  **VERO**

**ESEMPIO**:  $x: a \wedge b$  dove  $a, b \in A$  sono prop. atomiche

Siccome  $a \wedge b \in FBF$  posso  $\wedge$   $v(a \wedge b)$

CALCOLARE

Scegliamo una funzione  $v$  t.c.  $v(a) = 1$  e  $v(b) = 0$

e  $v(a \wedge b) = 1$ . E' una funzione di valutazione

MA NON è quella della LOGICA CLASSICA.

**DEFINIRE una VALUTAZIONE per la LOGICA CLASSICA**

## 1. NEGAZIONE, NOT

$$\begin{cases} v(p) = 1 & \text{SSE} & v(\neg p) = 0 \\ v(\neg p) = 1 & \text{SSE} & v(p) = 0 \end{cases}$$

| $p$          | $\neg p$          |
|--------------|-------------------|
| $v_1(p) = 0$ | $1 = v_1(\neg p)$ |
| $v_2(p) = 1$ | $0 = v_2(\neg p)$ |

Modo **ALGEBRICO**

★★

$$v(\neg p) = 1 - v(p)$$

$$v(\neg a) = 1 - v(a)$$

## 2. CONGIUNZIONE, AND

$$\begin{cases} v(a \wedge b) = 1 & \text{SSE} & v(a) = 1 = v(b) \\ v(a \wedge b) = 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

Modo **Algebrico**:

$$v(a \wedge b) = v(a) \cdot v(b)$$

$$v(a \wedge b) = \min(v(a), v(b))$$

$$\min(0, 0) = 0$$

$$\min(0, 1) = 0$$

$$\min(1, 0) = 0$$

$$\min(1, 1) = 1$$

### 3. DISGIUNZIONE, OR

$$\begin{cases} v(a \vee b) = 0 & \text{SSE } v(a) = v(b) = 0 \\ v(a \vee b) = 1 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

Modo Algebrico

$$v(a \vee b) = v(a) + v(b) \quad \text{NO!}$$

$$\times \quad 2 = 1 + 1$$

$$v(a \vee b) = v(a) + v(b) - v(a \wedge b)$$

$$\star \quad v(a \vee b) = v(a) + v(b) - v(a) \cdot v(b)$$

Altro modo:

$$v(a \vee b) = \max(v(a), v(b))$$

$$\max(0, 0) = 0$$

$$\max(0, 1) = 1$$

$$\max(1, 0) = 1$$

$$\max(1, 1) = 1$$

### 4. IMPLICAZIONE

$$v(a \Rightarrow b) = 1 \quad \text{se} \quad \begin{cases} v(a) = 0 \\ v(a) = v(b) = 1 \end{cases}$$

$$v(a \Rightarrow b) = 0 \quad \text{SSE} \quad v(a) = 1 \quad \wedge \quad v(b) = 0$$

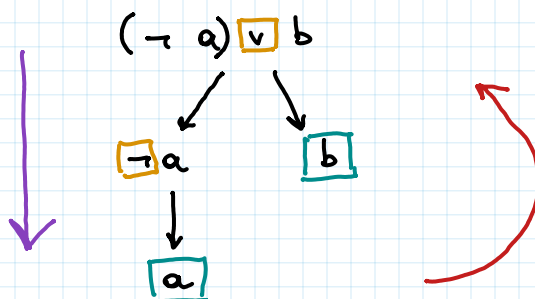
$$v(a) \leq v(b) \quad \text{allora} \quad v(a \Rightarrow b) = 1$$

| a            | b            | $a \Rightarrow b$          |
|--------------|--------------|----------------------------|
| $v_1(a) = 0$ | $v_2(b) = 0$ | $1 = v_1(a \Rightarrow b)$ |
| 0            | 1            | $1 = v_2(a \Rightarrow b)$ |
| 1            | 0            | 0                          |
| 1            | 1            | 1                          |

$$a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b \quad \text{def } a \Rightarrow b$$

$$\begin{aligned} v(a \Rightarrow b) &= v(\neg a \vee b) \stackrel{*}{=} v(\neg a) + v(b) - v(\neg a) \cdot v(b) = \\ &\stackrel{**}{=} 1 - v(a) + v(b) - (1 - v(a))v(b) = \\ &= 1 - v(a) + v(b) - (v(b) - v(a)v(b)) = \\ &= 1 - v(a) + v(a)v(b) \end{aligned}$$

5.  $v(\perp) = 0$



$$\begin{aligned} v((\neg a) \vee b) &= \max(v(\neg a), v(b)) = \\ &= \max(1 - v(a), v(b)) \end{aligned}$$

$a$ : "oggi piove"

$b$ : "porto l'ombrello"

$$v(a) = 0, \quad v(b) = 0 \quad \text{foglie}$$

$$\star = \max(1 - 0, 0) = \max(1, 0) = 1$$

Def: Una funzione  $v: \text{FBF} \rightarrow \mathcal{B}$  si dice **INTERPRETAZIONE** se:

1.  $v(\neg p) = 1 - v(p)$
2.  $v(a \wedge b) = \min(v(a), v(b))$
3.  $v(a \vee b) = \max(v(a), v(b))$
4.  $v(p \Rightarrow q) = 1 \iff v(p) \leq v(q)$
5.  $v(\perp) = 0$

Solitamente,  $v$  si indica con  $\llbracket \cdot \rrbracket$ .

$\uparrow$   
FBF

OSS: Se  $p \in \text{FBF}$  e  $v, v'$  due interpretazioni  
i valori  $v(p)$  e  $v'(p)$  SONO DETERMINATI UNIVOCAMENTE  
dai valori delle prop. ATOMICHE contenute in  $p$ .

### ESEMPIO

$p: (a \vee b) \Rightarrow c$

PROP. ATOMICHE contenute in  $p$

|        | a | b | c | $a \vee b$ | p            |
|--------|---|---|---|------------|--------------|
| $v_1:$ | 0 | 0 | 0 | 0          | 1 = $v_1(p)$ |
| $v_2:$ | 0 | 0 | 1 | 0          | 1 = $v_2(p)$ |
| $v_3:$ | 0 | 1 | 0 | 1          | 0            |
| $v_4:$ | 0 | 1 | 1 | 1          | 1            |
| $v_5:$ | 1 | 0 | 0 | 1          | 0            |
| $v_6:$ | 1 | 0 | 1 | 1          | 1            |
| $v_7:$ | 1 | 1 | 0 | 1          | 0            |
| $v_8:$ | 1 | 1 | 1 | 1          | 1            |

$v_1(p) = v_2(p)$   
anche se  $v_1 \neq v_2$

$v_1(a) = 0, v_1(b) = 1 = v_1(c)$   
 $v_9(a) = 0, v_9(b) = v_9(c) = 1$

ALLORA  $v_1(p) = v_9(p)$

OSS: Se  $p \in \text{FBF}$  contiene  $n$  proposizioni atomiche, allora ci  
sono  $2^n$  possibili INTERPRETAZIONI ( $v$ ) (diverse sulle  $n$   
prop. atomiche)

**PROPRIETÀ:** Sia  $p \in \text{FBF}$  e siano  $v_1$  e  $v_2$  due interpretazioni  
• Se  $v_1(a_i) = v_2(a_i)$  per ogni  $a_i$  prop. atomica di  $p$ ,  
allora  $v_1(p) = v_2(p)$ .

**Dim:** Per induzione sulla struttura di  $p \in \text{FBF}$ .

Siano  $a_1, a_2, \dots, a_k$  le prop. atomiche di  $p$ . ( $k \in \mathbb{N}$ )

CASO BASE:

• Se  $p$  è una prop. atomica  $\Rightarrow k=1$  e  $p=a_1$

$$v_1(a_1) = v_2(a_1) \text{ per HP}$$

$$\text{otteniamo } v_1(p) = v_2(p)$$

• Se  $p = \perp \Rightarrow k=0$

$$v_1(\perp) = v_2(\perp) = 0 \text{ (per regola 5 della def. di interpretazione)}$$

$$\text{otteniamo } v_1(p) = v_2(p)$$

PASSO INDUTTIVO:

•  $p = \neg x$

ESEMPIO:  $x: (a \vee b) \wedge c$  prop. atomiche:  $a, b, c$   
 $p = \neg x: \neg (a \vee b) \wedge c$  prop. atomiche:  $a, b, c$

Supponiamo che valga la PROPRIETÀ su  $x$ :  $v_1(x) \stackrel{HP}{=} v_2(x)$  induttiva

$$v_1(p) = v_1(\neg x) = 1 - v_1(x) \stackrel{HP}{=} 1 - v_2(x) = v_2(\neg x) = v_2(p)$$

TH INDUTTIVA

• Congiunzione.

$p = x \wedge y$

HP  
INDUTTIVA

$v_1(x) = v_2(x)$

HP  
INDUTTIVA

$v_1(y) = v_2(y)$

$$v_1(p) = v_1(x \wedge y) = v_1(x) \cdot v_1(y) \stackrel{HP}{=} v_2(x) \cdot v_2(y) = v_2(x \wedge y) = v_2(p)$$

• Disgiunzione \*

• Implicazione \*\*

HW

\*  $p = x \vee y \dots$

\*\*  $p = x \Rightarrow y \dots$

ESEMPIO

$p: ((a \vee b) \wedge \neg \perp) \Rightarrow c$

$p \in \text{FBF}$

Valle la PROPRIETÀ?

HP  $\begin{cases} v_1(a) = v_2(a) \\ v_1(b) = v_2(b) \\ v_1(c) = v_2(c) \end{cases}$

PROPRIETÀ

TH

$v_1(p) = v_2(p)$

$v_1(((a \vee b) \wedge \neg \perp) \Rightarrow c) = v_2(((a \vee b) \wedge \neg \perp) \Rightarrow c)$

però non è detto che  $v_1 = v_2$  sempre, anzi: di prop. atomiche, una può essere  $v_1(d) \neq v_2(d)$  perché  $d$  non è in  $p$ .

CASI BASE: •  $a, b, c$

$v_1(a) = v_2(a)$

$v_1(b) = v_2(b) \quad \vee$

$v_1(c) = v_2(c)$

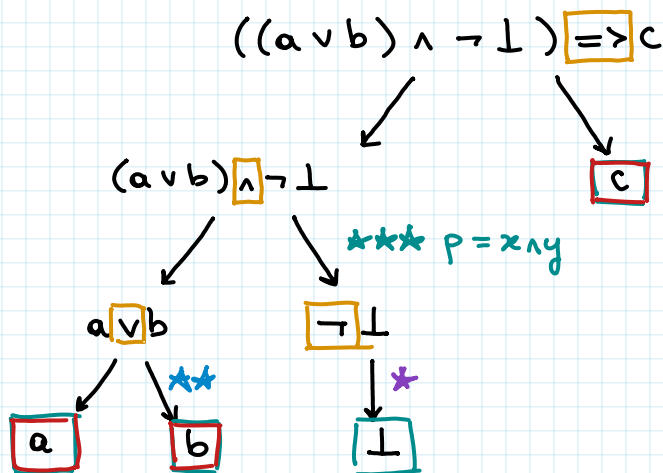
•  $v_i(\perp) = 0 \quad \vee$

\* PASSO INDUTTIVO  $p = \neg x$  NEGAZIONE

$v_1(\neg \perp) = v_2(\neg \perp)$

\*\* PASSO INDUTTIVO:  $p = x \vee y$

$v_1(a \vee b) = v_2(a \vee b)$



Def: Sia  $p \in \text{FBF}$  e  $v$  una qualche interpretazione

Se  $v(p) = 1$  allora si dice che

- $p$  è SODDISFATTA nell'interpretazione  $v$
- $v$  è un MODELLO per  $p$

e si scrive  $v \models p$

### ESEMPIO

$p: (a \wedge b) \Rightarrow c$

|       | a | b | c | $a \wedge b$ | p |
|-------|---|---|---|--------------|---|
| $v_1$ | 0 | 0 | 0 | 0            | 1 |
| $v_2$ | 0 | 0 | 1 | 0            | 1 |
| $v_3$ | 0 | 1 | 0 | 0            | 1 |
| $v_4$ | 0 | 1 | 1 | 0            | 1 |
| $v_5$ | 1 | 0 | 0 | 0            | 1 |
| $v_6$ | 1 | 0 | 1 | 0            | 1 |
| $v_7$ | 1 | 1 | 0 | 1            | 0 |
| $v_8$ | 1 | 1 | 1 | 1            | 1 |

$m = 3 \leadsto 2^m = 2^3 = 8$  casi  
(interpretazioni)

$\square$  è un ESEMPIO di MODELLO

$p$  NON è una tautologia

$v_7(p) = 0 \quad v_7 \not\models p$

ma tutte le altre sì:

$v_1 \models p, v_2 \models p, \dots, v_6 \models p, v_8 \models p$

abbiamo 7 modelli

Def:  $p \in \text{FBF}$  è SODDISFACIBILE se ha almeno un modello:

$\exists v: v \models p \quad (v(p) = 1)$

Def:  $p \in \text{FBF}$  è CONTRADDITTORIA quando NON è soddisfacibile:

$\forall v: v \not\models p \quad (v(p) = 0)$  e si scrive  $\not\models p$

Def:  $p \in \text{FBF}$  è VALIDA (è una TAUTOLOGIA) quando:

$\forall v: v \models p \quad (v(p) = 1)$

e si scrive  $\models p$

Def: Sia  $A \subseteq \text{FBF}$  (un insieme di FBF) si dice che  $A$  è **SODDISFACIBILE** se:

$$A = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$$

$$\exists v : \forall p_i \in A : v(p_i) = 1$$

$$\exists v : \forall p_i \in A : v \models p_i$$

$$v \models p_1, v \models p_2, \dots, v \models p_m$$

### ESEMPIO

$$A = \{a \Rightarrow b, (a \wedge b) \Rightarrow a\}$$

Esiste  $v$  (interpretazione) t.c.  $v(a \Rightarrow b) = 1 \wedge v((a \wedge b) \Rightarrow a) = 1$ ?

Per esempio, prendiamo una interpretazione t.c.  $v_1(a) = 0$

Allora  $v_1(a \Rightarrow b) = 1$ , ma anche  $v_1((a \wedge b) \Rightarrow a) = 1$ :

| a                   | b | $a \Rightarrow b$ |
|---------------------|---|-------------------|
| $v_1 \rightarrow 0$ | 0 | 1 ✓               |
| $\rightarrow 0$     | 1 | 1 ✓               |
| 1                   | 0 | 0                 |
| 1                   | 1 | 1                 |

| a                   | b | $a \wedge b$ | $(a \wedge b) \Rightarrow a$ |
|---------------------|---|--------------|------------------------------|
| $v_1 \rightarrow 0$ | 0 | 0            | 1 ✓                          |
| $\rightarrow 0$     | 1 | 0            | 1 ✓                          |
| 1                   | 0 | 0            | 1                            |
| 1                   | 1 | 1            | 1                            |

$A$  è SODDISFATTO da 3 interpretazioni

Def: Sia  $A \subseteq \text{FBF}$ , si dice che  $A$  è **INSODDISFACIBILE** se

$$\forall v : \exists p_i \in A : v(p_i) = 0$$

$$\forall v : \exists p_i \in A : v \not\models p_i$$

### ESEMPIO

$A = \{a \Rightarrow b, a \wedge \neg a\}$  non è SODDISFACIBILE perché.

$$v(a \wedge \neg a) = \min(v(a), v(\neg a)) = \min(v(a), 1 - v(a))$$

2 CASI

- $v(a) = 0 \quad \min(0, 1 - 0) = 0$

- $v(a) = 1 \quad \min(1, 1 - 1) = \min(1, 0) = 0$

In entrambi i casi,  $v(a \wedge \neg a) = 0$

Si ha  $\forall v : v \not\models a \wedge \neg a$

Quindi  $A$  è INSODDISFACIBILE.

NB: quando si calcola  $v(p) \dots$

$$\min(v(a), v(b)) = v(a) \cdot v(b) \\ \neq \min(a, b) \neq a \cdot b$$

Def. Sia  $A \subseteq \text{FBF}$ , si dice che  $p \in \text{FBF}$  è una  
CONSEGUENZA SEMANTICA di  $A$  se:

$$A \models p \\ \forall v : \left( \underbrace{\left( \forall p_i \in A \cdot v(p_i) = 1 \right)}_{\text{PREMESSA}} \Rightarrow \underbrace{v(p) = 1}_{\text{CONCLUSIONE}} \right)$$

$$A = \{p_1, \dots, p_m\} \quad \begin{array}{l} v \models p_1 \\ v \models p_2 \\ \dots \\ v \models p_m \end{array} \Rightarrow v \models p$$

ESEMPIO  $A = \{q, q \Rightarrow p\}$ ,  $A \models p$ ?

$$\text{Se } v(q) = 1 \text{ e } v(q \Rightarrow p) = 1$$

REGOLA di DEDUZIONE

$$\text{Allora } v(p) = 1 \quad \checkmark \quad \text{perciò } A \models p$$

LEMMA.  $A \models p \iff A \cup \{\neg p\}$  è INSODDISFACIBILE

Dim:

$$A \models p \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall v : \left( \left( \forall p_i \in A : v(p_i) = 1 \right) \Rightarrow v(p) = 1 \right)$$

①  $\exists p_i \in A : v(p_i) = 0$   
MA  
 $A$  è INSODDISFACIBILE  
 $A \cup \{\neg p\}$   
è ancora INSODDISF.

②  $\forall p_i \in A : v(p_i) = 1$   
allora  
 $v(p) = 1$

$\Updownarrow$   
 $v(\neg p) = 1 - v(p) = 0$   
 $A \cup \{\neg p\}$  non è SODDISF.

LEMMA:  $p \models q \stackrel{SSE}{\iff} \models p \Rightarrow q$   
 $(\{p\} \models q)$   $(p \Rightarrow q \text{ è una tautologia})$

(q è conseguenza semantica di p)

Dim ( $\Rightarrow$ )

$$p \models q \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall v: (\underbrace{v(p)=1}_{\text{premissa}} \Rightarrow v(q)=1) \quad *$$

| p | q | $p \Rightarrow q$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1                 |
| 0 | 1 | 1                 |
| 1 | 0 | 0                 |
| 1 | 1 | 1                 |

non rientra nella DEF \*  
 $v(p \Rightarrow q) = 1$

$v(p)=1, v(q)=0$   
 NON SI VERIFICA  
 dato che  $p \models q$   
 $\Rightarrow \models p \Rightarrow q$

( $\Leftarrow$ )

$$\models p \Rightarrow q \stackrel{\text{def}}{\iff} \boxed{\forall v. v(p \Rightarrow q) = 1 \iff v(p) \leq v(q)}$$

$$\Rightarrow \forall v: (v(p)=1 \Rightarrow v(q)=1) \iff p \models q$$

perché  $v(p) \leq v(q)$

## TEOREMA della DEDUZIONE SEMANTICA

$$A = \{p_1, p_2, \dots, p_m\} \subseteq \text{FBF}$$

$$A \models p$$

$$\{p_1, p_2, \dots, p_m\} \models p$$

$$\stackrel{SSE}{\iff}$$

$$p_1, p_2, p_3, \dots, p_{m-1} \models (p_m \Rightarrow p)$$

$$\iff$$

$$p_1, p_2, \dots, p_{m-2} \models (p_{m-1} \Rightarrow (p_m \Rightarrow p))$$

$$\dots$$

$$\iff$$

$$\models (p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (\dots \Rightarrow (p_m \Rightarrow p))))$$

oss:  
 vale anche  
 $\{p_3, p_7, \dots, p_m, p_1\} \models p$

ESEMPLI:

$$a \models a \vee b$$

ovvero

$$\models a \Rightarrow (a \vee b)$$

| a | b | $a \vee b$ | $a \Rightarrow (a \vee b)$ |
|---|---|------------|----------------------------|
| 0 | 0 | 0          | 1                          |
| 0 | 1 | 1          | 1                          |
| 1 | 0 | 1          | 1                          |
| 1 | 1 | 1          | 1                          |

è una tautologia

il che dimostra  $a \models a \vee b$ HW: •  $b \models a \vee b$ 

•  $a \wedge b \models a$

•  $a \wedge b \models b$

•  $\{a, a \Rightarrow b\} \models b$

MODUS PONENS

← dimostrare le  $\models$ Def:  $[(a \models b \wedge b \models a) \text{ allora } a \equiv b]$ 

↳ Due  $p, q \in \text{FBF}$  sono SEMANTICAMENTE EQUIVALENTI se  
 $\forall v: (v(p) = v(q))$  e si scrive  $p \equiv q$

ESEMPLI:

IDEMPOTENZA

$p \vee p \equiv p$

COMMUTATIVA

$p \vee q \equiv q \vee p$

ASSOCIATIVA:  $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

ASSORBIMENTO:  $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

DISTRIBUTIVA:  $p \vee (q \wedge r) \equiv$

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$p \wedge p \equiv p$

$p \wedge q \equiv q \wedge p$

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

$p \wedge (q \vee r) \equiv$

$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

DOPPIA NEGAZIONE

$\neg(\neg p) \equiv p$

LEGGI DI DE MORGAN

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

**HW**: dimostrare che  $\models$  usando solo la def. di  $v: FBF \rightarrow \{0,1\}$

**ESEMPIO**:

CONNETTIVO PRINCIPALE  
(più esteso)

Dimostrare  $\models \underbrace{\neg(\neg a \wedge \neg \neg a) \Rightarrow (c \Rightarrow (c \vee b))}_{p \in FBF}$

con  $v: FBF \rightarrow \{0,1\}$

Dobbiamo provare  $v(p) = 1$ .

$v(\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}) = 1$ ?

$\textcircled{1}: \neg(\neg a \wedge \neg \neg a)$

$\textcircled{2}: c \Rightarrow (c \vee b)$

$v(\textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2}) = 1$  SSE  $v(\textcircled{1}) \leq v(\textcircled{2})$

$v(\textcircled{1}) = v(\neg(\neg a \wedge \neg \neg a)) = 1 - v(\neg a \wedge \neg \neg a) =$

$\uparrow$   
 $v(\neg p) = 1 - v(p)$

$\neg \neg a = \neg(\neg a)$

$= 1 - \min(v(\neg a), v(\neg \neg a)) =$

$= 1 - \min(1 - v(a), 1 - v(\neg a)) =$

$= 1 - \min(\underbrace{1 - v(a)}, \cancel{1} - \cancel{1} + \underbrace{v(a)}) = *$

$\bullet v(a) = 0 \quad * = 1 - \min(1 - 0, 0) = 1 - 0 = 1$

$\bullet v(a) = 1 \quad * = 1 - \min(1 - 1, 1) = 1 - 0 = 1$

$\bullet v(\textcircled{1}) = 1$  SEMPRE

$\bullet$  Dobbiamo mostrare che  $v(\textcircled{1}) \leq v(\textcircled{2})$  cioè  $v(\textcircled{2}) = 1$

$v(\textcircled{2}) = v(c \Rightarrow (c \vee b)) = 1$  SSE  $v(c) \leq v(c \vee b)$

$$\text{SSE} \quad v(c) \leq \max(v(c), v(b))$$

$$\begin{aligned} \bullet v(c) = 0 & \quad v(c) = 0 \leq \max(0, v(b)) \xrightarrow{0} \checkmark \\ \bullet v(c) = 1 & \quad v(c) = 1 \leq \max(1, v(b)) = 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Dunque  $v(c)$  è sempre  $\leq$  di  $v(c \vee b)$ , che vuol dire  $v(c \Rightarrow (c \vee b)) = 1$ .

$$v(①) \leq v(②) \quad \text{Sì perché} \quad 1 \leq 1 \quad \square$$

### ESEMPIO

$$\models \underbrace{\neg((a \vee b) \wedge \neg(a \vee b)) \vee (b \wedge \neg b)}_p$$

Provare che  $p$  è una tautologia.  $v(p) = 1$ ?

$$v(\underbrace{\neg((a \vee b) \wedge \neg(a \vee b))}_{\text{p}} \vee \underbrace{(b \wedge \neg b)}_{\text{q}})$$

1. Individuare CONNETTIVO PRINCIPALE

2. Identifichiamo la regola da applicare

$$v(\underbrace{p}_{\text{p}} \vee \underbrace{q}_{\text{q}}) = \max(v(p), v(q))$$

$$= \max(v(\underbrace{\neg((a \vee b) \wedge \neg(a \vee b))}_{\text{p}}), v(\underbrace{b \wedge \neg b}_{\text{q}}))$$

Valutazione.

1. individuare CONN. PRINCIPALE:  $\neg$

2. Regole  $\neg$

$$v(\neg p) = 1 - v(p)$$

$$v(\neg((a \vee b) \wedge \neg(a \vee b))) =$$

$$= 1 - v((a \vee b) \wedge \neg(a \vee b)) = **$$

Valutazione.

1. individuare CONN. PRINCIPALE:  $\wedge$

2. Regole  $\wedge$

$$v(p \wedge q) = v(p) \cdot v(q)$$

$$v(b \wedge \neg b) = v(b) \cdot v(\neg b) \stackrel{1+2}{=} \text{con 1}$$

$$= v(b) \cdot (1 - v(b)) = *$$

\*  $v(b)$  è una **FOGLIA** dell' albero della FBF

quindi può essere  $v(b)=0$  o  $v(b)=1$

$$\cdot v(b)=0 \Rightarrow * = v(b)(1-v(b)) = 0 \cdot (1-0) = \boxed{0}$$

$$\cdot v(b)=1 \Rightarrow * = v(b)(1-v(b)) = 1 \cdot (1-1) = 1 \cdot 0 = \boxed{0}$$

Quindi  $v(b \wedge \neg b) = 0$  sempre

$$** \quad 1 - v((a \vee b) \wedge \neg(a \vee b)) \stackrel{1.+2. \wedge}{=}$$

$$= 1 - \min(v((a \vee b)), v(\neg(a \vee b))) = \text{HW}$$

\* + \*\* entrano nel calcolo del max:

$$v(p) = \max(*, **) = 1$$

## EQUIVALENZE SEMANTICHE

CONTRONOMICALE

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

(def di  $\Rightarrow$ )

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Dim di CONTRONOMICALE:

$$v(p \Rightarrow q) \stackrel{?}{=} v(\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Cambio SEGNO  
Significa che  $\leq$  DIVENTA  $\geq$

$$1. \quad v(p \Rightarrow q) = 1 \quad \text{SSE} \quad v(p) \leq v(q) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - v(p) \geq 1 - v(q) \quad *$$

$$2. \quad v(p \Rightarrow q) = 0 \quad \text{SSE} \quad v(p) > v(q) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - v(p) < 1 - v(q) \quad *$$

$$1. \quad * \quad \underbrace{1 - v(q)}_{v(\neg q)} \leq \underbrace{1 - v(p)}_{v(\neg p)} \quad \text{SSE} \quad v(\neg q \Rightarrow \neg p) = 1$$

## REGOLA per ASSURDO

$$p \Rightarrow q \equiv (p \wedge (p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow \perp$$

Simbolo di FALSITÀ  
o ASSURDO

**HW** : dimostrare  $\uparrow$  con  $v: FBF \rightarrow \{0,1\}$   
poi scrivere la tavola di verità

## DEFINIZIONE NUOVI CONNETTIVI

## DOPPIA IMPLICAZIONE

$$a \Leftrightarrow b \equiv (a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$$

$$v(a \Leftrightarrow b) = v((a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a))$$

$\leftarrow$  Sto DEFINENDO il connettivo  $\Leftrightarrow$

[ REGOLA di  
INTRODUZIONE

$\rightarrow$  Sto "eliminando" il connettivo  $\Leftrightarrow$

[ REGOLA di  
ELIMINAZIONE

## OR ESCLUSIVO (XOR)

$$a \oplus b \stackrel{*}{\equiv} (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$$

$$v(a \oplus b) = v((a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b))$$

$\leftarrow$  Sto DEFINENDO il connettivo  $\oplus$

[ REGOLA di  
INTRODUZIONE

$\rightarrow$  Sto "eliminando" il connettivo  $\oplus$

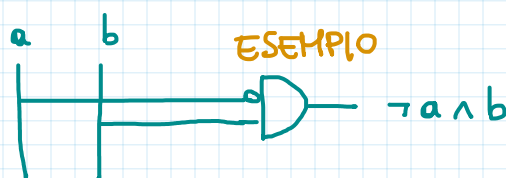
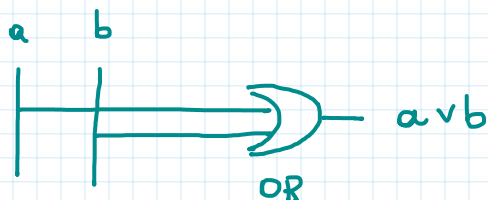
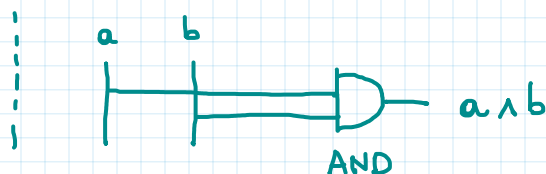
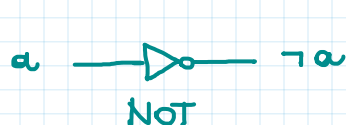
[ REGOLA di  
ELIMINAZIONE

**HW** : provare  $\stackrel{*}{\equiv}$  con tavole di verità

# FORME NORMALI

→ CONGIUNTIVE  
→ DISGIUNTIVE

## PORTE LOGICHE



## TEOREMA:

1.  $a \Rightarrow b \equiv \neg a \vee b$
2.  $a \vee b \equiv \neg(\neg a \wedge \neg b)$
3.  $a \wedge b \equiv \neg(\neg a \vee \neg b)$
4.  $\perp \equiv a \wedge \neg a$

↳ TERZO ESCLUSO

def. dell'IMPLICAZIONE

DE MORGAN  
serve per INTRODURRE  
o ELIMINARE  $\wedge, \vee$

→ ELIMINAZIONE

← INTRODUZIONE

Def: Siano  $p_1, p_2, \dots, p_n \in \text{FBF}$

Si dice DISGIUNZIONE la FBF costruita in questo modo:

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \in \text{FBF}$$

Si dice CONGIUNZIONE la FBF costruita in questo modo:

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \in \text{FBF}$$

Def: Una LETTERALE è una PROPOSIZIONE ATOMICA o

la sua negazione:

$a$

$\neg a$

dove  $a \in A$

Def: Una FBF è in **FORMA NORMALE CONGIUNTIVA (FNC)**

ssE è  $p \in \text{FBF} : p_1 \wedge p_2 \dots \wedge p_m$  (CONGIUNZIONE)

dove  $\forall p_i : p_i$  è DISGIUNZIONE di LETTERALI

**ESEMPIO :**

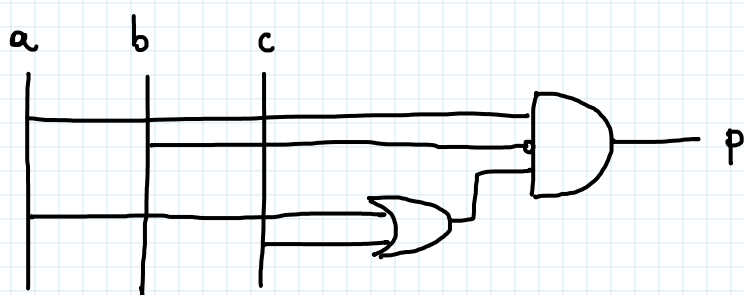
$a, b, c$  sono PROP. ATOMICHE

Consideriamo  $p : a \wedge \neg b \wedge (a \vee c)$  è in FNC

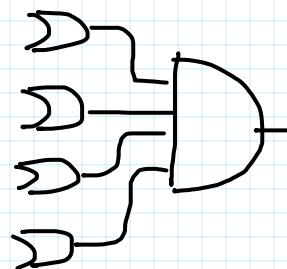
Sono  
LETTERALI

è una CONGIUNZIONE

è una DISGIUNZIONE di letterali



FNC :

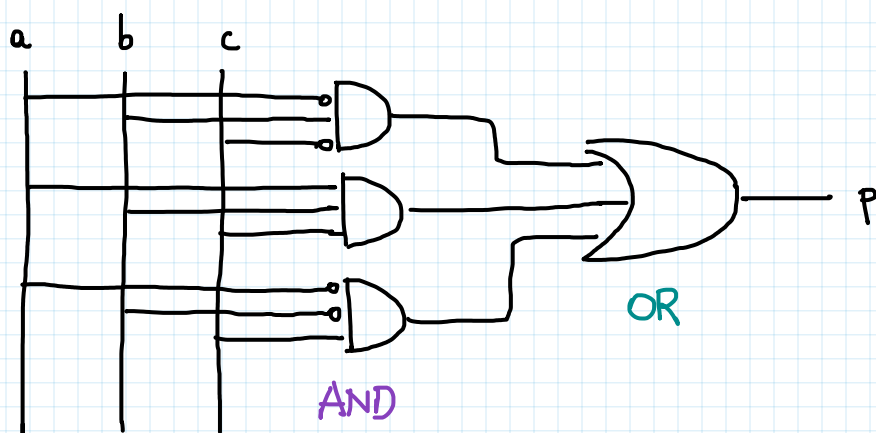


Def: Una FBF  $p$  è in **FORMA NORMALE DISGIUNTIVA (FND)**

ssE è  $p \in \text{FBF} : p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m$  (DISGIUNZIONE)

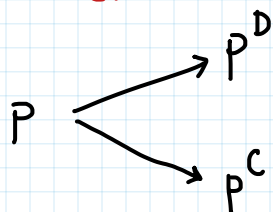
dove  $\forall p_i : p_i$  è una CONGIUNZIONE di LETTERALI

**ESEMPIO :**  $p : (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg b \wedge c)$



**TEOREMA** · Sia  $p \in \text{FBF}$ , allora ESISTONO  $p^c$  e  $p^D$  FNC e FND  
 t.c.  $p \equiv p^c$   
 $p \equiv p^D$

### PROCEDIMENTO



Regole di ELIMINAZIONE

1. ELIMINARE tutti i connettivi TRANNE  $\neg, \vee, \wedge$
2. UTILIZZARE RIPETUTAMENTE le leggi di De Morgan per ottenere il connettivo principale  $\wedge, \vee$
3. UTILIZZARE RIPETUTAMENTE la legge di doppia negazione per ottenere i letterali
4. UTILIZZARE ASSOCIATIVA e DISTRIBUTIVA dell' $\vee$  e dell' $\wedge$

### ESEMPIO.

$$\begin{aligned}
 p: (a \vee \neg b) \Rightarrow c &\equiv \neg(a \vee \neg b) \vee c \\
 &\equiv (\neg a \wedge \neg \neg b) \vee c \\
 p^D &\equiv (\neg a \wedge b) \vee c \\
 p^c &\equiv (\neg a \vee c) \wedge (b \vee c)
 \end{aligned}$$

**PROCEDIMENTO** a partire dalle tabelle di verità  $p \in \text{FBF}$

| a | b | c | p |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c)$$

$\vee$

$$(a \wedge \neg b \wedge \neg c) \equiv p^D$$

$\vee$

$$(a \wedge \neg b \wedge c)$$

HW ·  $p^c = ?$