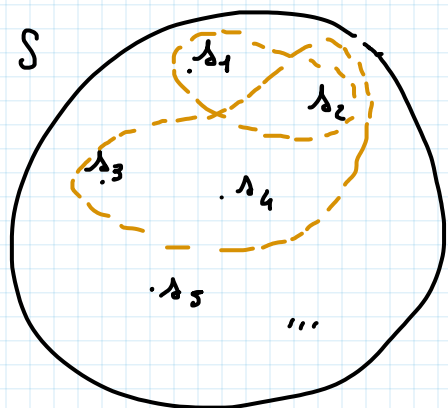


COMBINAZIONI

ESEMPIO: Ci sono 12 studenti (nell'insieme S) che devono dividersi in gruppi. Quanti modi ci sono?



s_1 e s_2 formano un gruppo
 s_2, s_3, s_4 sono un altro gruppo

Il problema si traduce nel contare
 il numero di SOTTOINSIEMI

Se $|S| = n$ allora $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$

$f: S \rightarrow \{0, 1\}$

$s_i \mapsto 1$

Sì, s_i è nel gruppo

$s_i \mapsto 0$

No, s_i NON è nel gruppo

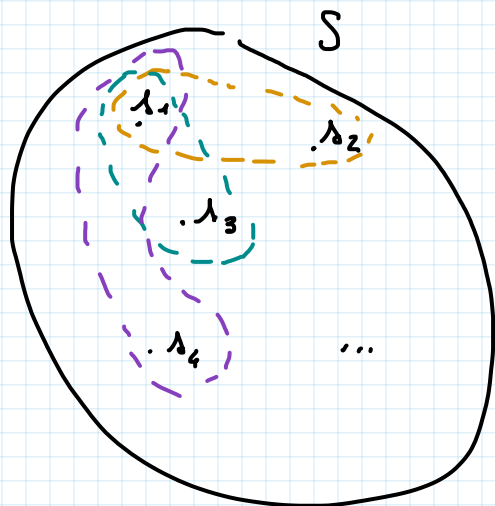
COROLLARIO 2

$|\{0, 1\}| = 2$

$\Rightarrow 2^n$

$|S| = 12$, il modo di creare gruppo per progetto è tra:
 2^{12} modi possibili: $2^{12} = 4096$

2) Quanti gruppi da 2 studenti posso creare?



Questo è il NUMERO di
 COMBINAZIONI di
 2 elementi su 12

la combinazione $\{s_1, s_2\} = \{s_2, s_1\}$

→ Sto contando il numero di
 SOTTOINSIEMI di 2 elementi.

2-SOTTOINSIEMI

Def: COMBINAZIONE di k elementi su n è il numero di k -SOTTOINSIEMI di un insieme S , $|S|=n$, $k \leq n$.
Si scrivono $\binom{n}{k}$ e si legge "n su k".

ESEMPIO: Il numero di gruppi di 2 studenti per progetto, su 12 studenti in totale è $\binom{12}{2}$.

TEOREMA: Sia S un insieme qualsiasi, finito, $|S|=n$.
Allora il numero di k -SOTTOINSIEMI, $k \leq n$ è dato da:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k(k-1)(k-2) \dots 2 \cdot 1}$$

← permutazioni →

OSS: Permutazioni k elementi su n sono: $\frac{n!}{(n-k)!}$

$(s_1, s_2) \neq (s_2, s_1)$ sono 2 permutazioni diverse

$\{s_1, s_2\} = \{s_2, s_1\}$ MA sono 2 combinazioni uguali
→ 1 sola combinazione!

$(s_1, s_2, s_3) \neq (s_1, s_3, s_2) \neq (s_2, s_3, s_1) \neq (s_2, s_1, s_3) \neq \dots$

↳ 3! permutazioni diverse

Sono una sola combinazione
 $\{s_1, s_2, s_3\}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad \text{si chiama anche COEFFICIENTE BINOMIALE}$$

ESEMPIO:

Calcoliamo $\binom{1}{1} = \frac{1!}{(1-1)!1!} = \frac{1}{0!1!} = 1$, $\binom{1}{0} = 1$

Calcoliamo $\binom{2}{1} = \frac{2!}{(2-1)!1!} = \frac{2}{1} = 2$

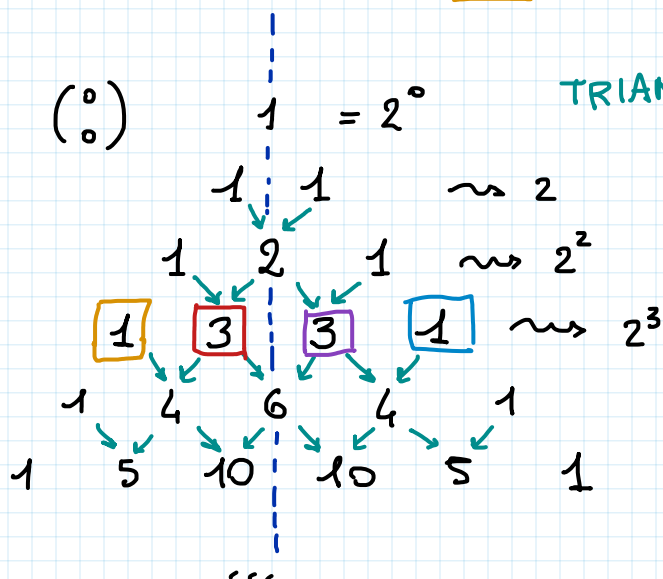
$$\binom{2}{2} = \frac{2!}{(2-2)!2!} = 1$$

$$\binom{2}{0} = \frac{2!}{(2-0)!0!} = 1$$

$A = \{a\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$ 0-sottoinsiemi $\binom{1}{0} = 1$ $\leadsto 2 = |\mathcal{P}(A)|$
 1-sottoinsiemi $\binom{1}{1} = 1$

$B = \{a, b\}$ $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, B\}$ $\leadsto |\mathcal{P}(B)| = \binom{2}{0} + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 4$

$$\Rightarrow |\mathcal{P}(S)| = \sum_{i=0}^{|S|=m} \binom{m}{i} = 2^m$$



$$\begin{aligned} &\binom{0}{0} \\ &\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ &\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ &\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \end{aligned}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{1}$$

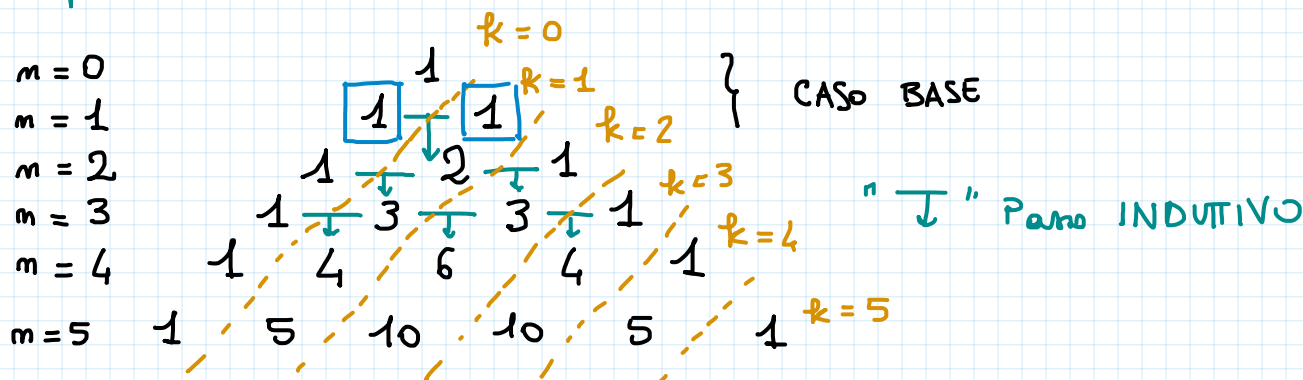
$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$$

hw : Dimostrare per INDUZIONE :

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$$

$$\left[\text{Sugg: } \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]$$

Def: TRIANGOLO di TARTAGLIA



$$(a+b)^m$$

POTENZA di un BINOMIO

$$m=0 \quad (a+b)^0 = 1$$

$$m=1 \quad (a+b)^1 = 1 \cdot a^1 \cdot b^0 + 1 \cdot a^0 \cdot b^1$$

$$m=2 \quad (a+b)^2 = 1 \cdot a^2 \cdot b^0 + 2 \cdot a^1 \cdot b^1 + 1 \cdot a^0 \cdot b^2$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \rightsquigarrow & 1 \\ 0 & \rightsquigarrow & 1 \end{array}$$

$$m=3 \quad (a+b)^3 = 1 a^3 b^0 + 3 a^2 b^1 + 3 a^1 b^2 + 1 a^0 b^3$$

$$(a+b)^{60} = \dots$$

dobbiamo CALCOLARE con il PASSO INDUTIVO
61 righe del triangolo di TARTAGLIA

MA:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \dots \end{array}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!}$$

$$n=60 : \binom{60}{0}, \binom{60}{1}, \dots, \binom{60}{60}$$

li posso calcolare senza PASSO IND.

FORMULA di NEWTON

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, m$$

$m = \text{FISso}$

$\binom{m}{k}$ si chiamano COEFFICIENTI BINOMIALI

Hw SVOLGIMENTO

$$P(m): \quad \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$$

Dim. che $\forall m \in \mathbb{N} : P(m)$.

Dim:

CASO BASE : $m = 0$

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} \stackrel{?}{=} 2^0$$

$$\binom{0}{0} \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

PASSO INDUTTIVO

$$P(m) \stackrel{?}{\Rightarrow} P(m+1):$$

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m \Rightarrow \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} = 2^{m+1}$$

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} = \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k} + \binom{m+1}{m+1}$$

Non posso applicare $P(m)$

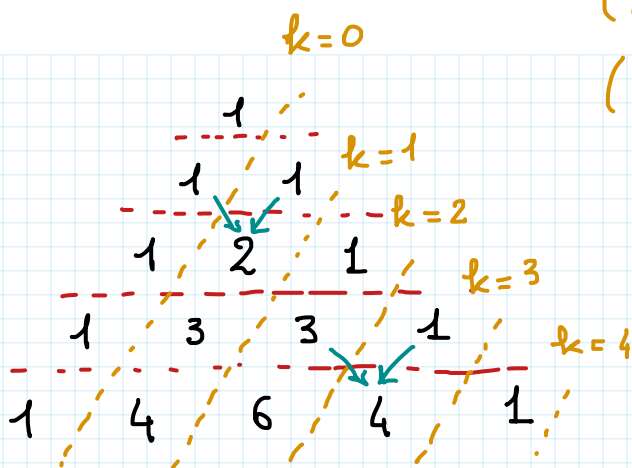
$$n=0$$

$$n=1$$

$$n=2$$

$$n=3$$

$$n=4$$



$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\frac{n!}{(n-n)!n!} = 1$$

Simmetria: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Definizione di

Triangolo:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} =$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Sto considerando:

$$1 \quad \boxed{4 \quad 6 \quad 4} \quad 1$$

Se $k=0$, $k-1=-1$, HA $\binom{n}{-1}$?

$$= \overbrace{\binom{n+1}{0}}^1 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} + 1 =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} =$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} + \binom{n}{0} - \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} =$$

$$= 2 + \boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} - \overbrace{\binom{n}{0}}^1 =$$

$$P(n): \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\begin{aligned}
 \text{HP} &= 1 + \boxed{2^m} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{\boxed{k-1}} = \\
 &= 1 + 2^m + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{\boxed{k}} + \binom{m}{m} - \binom{m}{m} = \\
 &= \cancel{1} + 2^m + \boxed{\sum_{k=0}^m \binom{m}{k}} - \cancel{1} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} & & \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} & \\
 & & \text{---} & & \text{---} & \\
 & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 &
 \end{array}$$

$$\text{HP} = 2^m + \boxed{2^m} = 2 \cdot 2^m = 2^1 \cdot 2^m = 2^{m+1} \quad \square$$

HW : Dimostrare $P(m) : \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} = 2^m$ in altro modo, ovvero ricordando che se A è un insieme finito e $|A|=n$, allora $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. (Sempre per induzione)