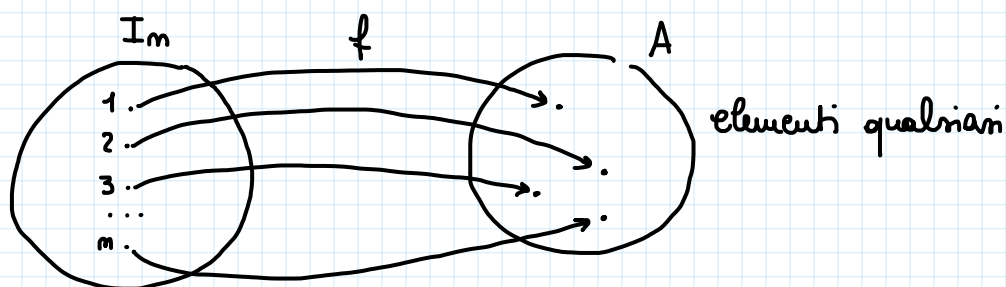


COMBINATORIA

"ARTE del CONTARE"

$$I_m = \{1, 2, 3, \dots, m\} \quad \text{INSIEME di INDICI}$$

A insieme
qualunq. FINITO



Se f è BIUNIVOCA, A ha m elementi

Def Sia A un insieme qualunq., si dice che A ha CARDINALITÀ m se $\exists f$ t.c. $f: I_m \rightarrow A$ è biiettiva.

PRINCIPIO della SOMMA

S, T insiemi DISGIUNTI, $S \cap T = \emptyset$, FINITI, allora

$$|S \cup T| = |S| + |T|$$

$$\text{Dim. } |S| = m \in \mathbb{N} \Rightarrow f: I_m = \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow S \text{ biunivoca}$$

$$|T| = m \in \mathbb{N} \Rightarrow g: I_m = \{1, 2, \dots, m\} \rightarrow T \text{ biunivoca}$$

Cerco una funzione h t.c.

$$h: I_{m+m} \rightarrow S \cup T \text{ biunivoca?}$$

$$\text{" } \{1, 2, 3, \dots, m+m\}$$

Se $m \leq m$:

$$\begin{cases} h(i) = g(i) & i = 1, \dots, m \\ h(j) = h(i+m) = f(i) & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

$$h(1) = g(1), h(2) = g(2), \dots, h(m) = g(m), h(m+1) = f(1) \\ h(m+2) = f(2), \dots, h(m+m) = f(m)$$

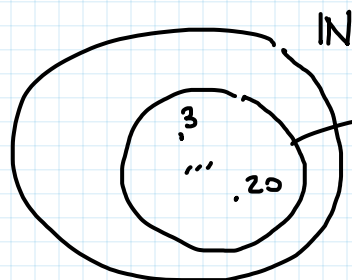
quindi h è BIUNIVOCA, $h: I_{m+m} \rightarrow S \cup T$

$$\Rightarrow |S \cup T| = m+m = |T| + |S| \quad \square$$

ESERCIZIO:

- Quanti sono i numeri naturali ($m \in \mathbb{N}$) t.c. $3 \leq m \leq 20$ e sono pari oppure sono primi

$$3 \leq m \leq 20 \quad \wedge \quad (\underbrace{m = 2i}_{(1)} \quad \vee \quad (\underbrace{1|m \wedge m|m}_{(2)}))$$



$$A = \{3, 4, 5, \dots, 20\} \quad \text{"universo"}$$

$$S = \{4, 6, 8, \dots, 20\}$$

$$T = \{3, 5, 7, \dots, 19\}$$

$$S \cap T = \emptyset$$

$$S \cup T = \{x \in A : \underbrace{x \in S}_{(1)} \vee \underbrace{x \in T}_{(2)}\}$$

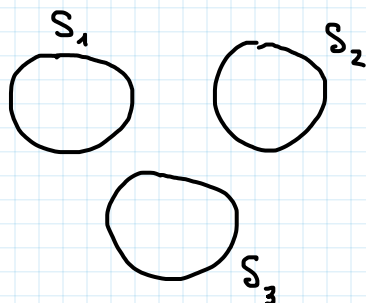
PRINCIPIO della SOMMA: $|S| = 9$ $\leadsto$ $|S \cup T| = 16$
 $|T| = 7$

HW:

- Quanti sono i modi per pescare un ASSO o una REGINA da un mazzo di 52 carte?
- Quanti sono i modi per pescare una CARTA ROSSA o un ASSO da un mazzo di 52 carte?

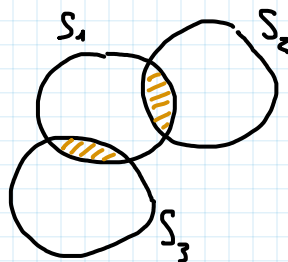
PRINCIPIO della SOMMA GENERALIZZATO

Se $S_1, S_2, \dots, S_m$ insiemi generici, finiti e A DUE A DUE disgiunti
 $S_i \cap S_j = \emptyset$ per $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, m$, $i \neq j$



ESEMPIO
di ins.
a due
a due
DISGIUNTI

$$\Rightarrow S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$$



$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \emptyset$$

MA $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

e $S_1 \cap S_3 \neq \emptyset$

Allora

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_m| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \dots + |S_m| =$$

$$|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_m| = \sum_{i=1}^m |S_i| \quad P(m)$$

Dimostrazione: TH: " $\forall m \in \mathbb{N} \cdot P(m)$ "

1) CASO BASE, $m=1$ cioè abbiamo UN SOLO INSIEME

$$|S_1| = k \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^m |S_i| = \sum_{i=1}^1 |S_i| = |S_1| = k$$

$m=2$

$$|S_1| = k, \quad |S_2| = j \quad \Rightarrow \quad |S_1 \cup S_2| = k + j = \sum_{i=1}^2 |S_i| = |S_1| + |S_2|$$

$S_1 \cap S_2 = \emptyset$

↑ l'abbiamo già dim nel PRINCIPIO della SOMMA

2) PASSO INDUTTIVO

$$P(m) \Rightarrow P(m+1) ?$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} |S_i| = \underbrace{\sum_{i=1}^m |S_i|}_{\text{HP INDUTTIVA}} + |S_{m+1}| = |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_m| + |S_{m+1}|$$

Oss. che, chiamando $T = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$, si ha

$$T \cap S_{m+1} = \emptyset$$

PRINCIPIO della SOMMA

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m| + |S_{m+1}| = |T| + |S_{m+1}| = |T \cup S_{m+1}| = \\ = |S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m \cup S_{m+1}| \quad \square$$

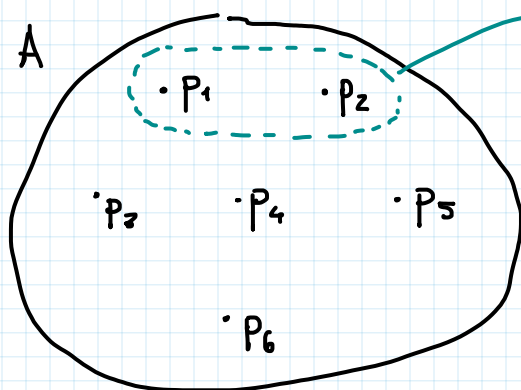
ESEMPIO:

Gruppo di 6 persone $p_1, p_2, \dots, p_6$ devono eleggere un presidente e un segretario. Inoltre $P \neq S$.

$\downarrow$
P

$\downarrow$
S

Quanti modi ci sono?



es. $p_1 = P$ e $p_2 = S$

$p_2 = P$ e $p_1 = S$

(p_1, p_2) oppure (p_2, p_1)

dove I elemento è P
II elemento è S

(P, S)

p_1 ~~X~~

(p_1, p_2)

(p_1, p_3)

(p_1, p_4)

(p_1, p_5)

(p_1, p_6)

5 modi
se $p_1 = P$

C_1

~~X~~ (p_2, p_1)

~~X~~ (p_2, p_2)

(p_2, p_3)

(p_2, p_4)

(p_2, p_5)

(p_2, p_6)

5 modi
se $p_2 = P$

C_2

Abbiamo creato

6 INSIEMI di COPPIE (P, S)

C_1 è quello con $p_1 = P$

$$|C_1| = 5$$

C_2 è quello con $p_2 = P$

$$|C_2| = 5$$

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

C_3, C_4, C_5, C_6 analogamente

principio SOMMA GENERALIZZATO

$$|C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6| = |C_1| + |C_2| + |C_3| + |C_4| + |C_5| + |C_6| = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 30 \text{ possibilità}$$

Definizione: Dato un insieme S finito, $|S|=m$, si dice
PERMUTAZIONE di k ELEMENTI di S , $k \leq m$
 una funzione INIETTIVA $f: I_k \rightarrow S$

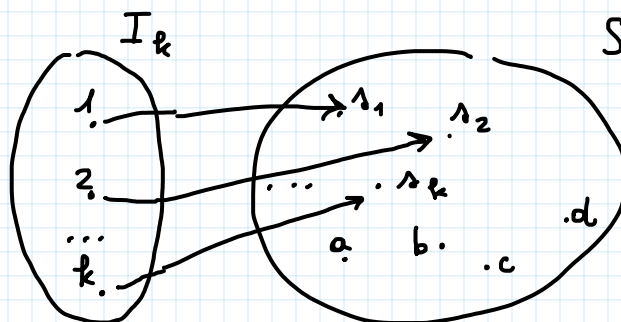
$$f: I_k \rightarrow S$$

$$1 \mapsto s_1$$

$$2 \mapsto s_2$$

...

$$k \mapsto s_k$$



$$\text{Se } i \neq j \Rightarrow s_i \neq s_j \text{ (iniettiva)}$$

$$\underbrace{(s_1, s_2, \dots, s_k)}_{\substack{\text{permutazione} \\ k\text{-upla}}} \in \underbrace{S \times S \times S \times \dots \times S}_{k \text{ volte}}$$

ESEMPIO:

Gruppo di 6 persone, devono scegliere P e S t.c. $P \neq S$

Quindi sto cercando una PERMUTAZIONE di 2 elementi su l'insieme A di 6 persone.

$$f: I_2 \rightarrow A$$

$$f: \{1, 2\} \rightarrow A$$

$$1 \mapsto p_1$$

$$2 \mapsto p_4$$

(p_1, p_4) è una permutazione di k elementi, $k=2$, su m , $m=6$.

La DOMANDA "quanti modi ci sono..." diventa:

Quante permutazioni di 2 elementi su 6 ci sono?

Def: Se S è un insieme generico, finito con $|S|=n$, una permutazione di $k=n$ elementi di S si dice **PERMUTAZIONE di S** ed è.

$$f: I_n \rightarrow S \quad \text{INIETTIVA} \quad \text{che "copre" tutto l'insieme } S$$

$$\begin{array}{l} 1 \mapsto s_1 \\ 2 \mapsto s_2 \\ \dots \\ n \mapsto s_n \end{array} \quad \text{quindi è anche SURIETTIVA}$$

$\Rightarrow f$ è BIUNIVOCA

ESEMPIO: $S = \{a, b, c\}$. permutazioni in S

$$f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c\}$$

$$\begin{array}{l} 1 \mapsto b \\ 2 \mapsto a \\ 3 \mapsto c \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \mapsto b \\ 2 \mapsto a \\ 3 \mapsto c \end{array}} \right\} \rightarrow (b, a, c)$$

questa è UNA delle possibili permutazioni

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \\ (a, b, c) \end{array} \in S \times S \times S$$

$$(a, c, b)$$

$$(b, a, c)$$

$$(b, c, a)$$

$$(c, a, b)$$

$$(c, b, a)$$

$\rightarrow$ ci sono **6** PERMUTAZIONI in S
 $\downarrow$
 le ho contate

OSS: le permutazioni si possono vedere come n -uple

PRINCIPIO del PRODOTTO

[Ripasso: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$]

Siano A, B insiemi finiti, $|A| = k$ e $|B| = j$, allora

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = k \cdot j$$

PRINCIPIO del PRODOTTO GENERALIZZATO

Siano $S_1, S_2, \dots, S_m$ insiemi finiti, $|S_1| = m_1, |S_2| = m_2, \dots, |S_m| = m_m$

Allora:

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_m| = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \dots \cdot m_m$$

$$|S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m| = \prod_{i=1}^m |S_i| \quad P(m)$$

HW: Dimo per induzione che $\forall m \in \mathbb{N} : P(m)$.

ESEMPIO

3 tipi di pane

5 tipi di affettato

4 salse

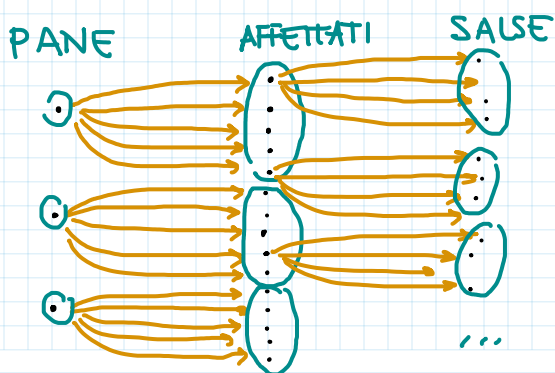
} DOMANDA: quanti tipi di panini posso fare?

$$P = \{(\text{pane}, \text{affettato}, \text{salsa})\}$$

$\swarrow$ $\downarrow$ $\searrow$
 $\in S_1$ $\in S_2$ $\in S_3$

$$|S_1| = 3, |S_2| = 5, |S_3| = 4$$

$$\leadsto 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ panini diversi}$$



$\leadsto 60$

HW

- Capire quante possono essere le possibili PERMUTAZIONI di un insieme S di n elementi
- Gruppo di 6 persone, quanti sono i modi per scegliere P (presidente), S (segretario), V (vice-presidente) usando le permutazioni di k elementi su n .
 $\begin{matrix} 11 \\ 3 \end{matrix}$ $\begin{matrix} 11 \\ 6 \end{matrix}$

FUNZIONI DEFINITE per RICORRENZA

Def: $f: \mathbb{N} \rightarrow A$, dove A è un insieme qualsiasi, si dice DEFINITA per RICORRENZA (o in modo RICORSIVO) se NON è nota la legge $n \mapsto f(n)$, ma conosciamo:

- $f(0)$, ie CASO BASE ($n=0$)
- Una REGOLA per ottenere (CALCOLARE) $f(n+1)$ a partire da $f(n)$, ie PASSO INDUTTIVO o RICORSIONE

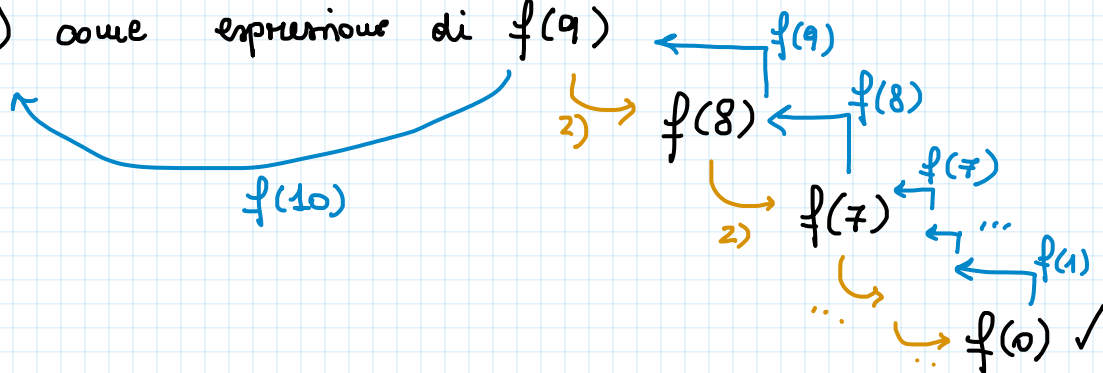
OSS: Tutti i valori di f sono UNIVOCAMENTE DETERMINATI

$f(0)$ l'abbiamo 1)

$f(1)$ lo calcoliamo a partire da $f(0)$ 2)

Se voglio calcolare $f(10)$ devo usare 2) per trovare

$f(10)$ come espressione di $f(9)$



OSS: Funzioni definibili in modo RICORSIVO sono TUTTE e SOLE le funzioni $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ CALCOLABILI

Def: FATTORIALE di n :

$$\star \quad n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \text{ (1)} \\ n \cdot (n-1)! & \text{se } n \neq 0 \text{ (2)} \end{cases} \quad 0! = 1$$

ESEMPIO: Calcolare $5!$ con la def RICORSIVA

$$\begin{aligned} n=5 & \quad 5! \stackrel{(2)}{=} 5 \cdot (5-1)! = 5 \cdot 4! \stackrel{(2)}{=} \\ n=4 & \quad \stackrel{(2)}{=} 5 \cdot 4 \cdot (4-1)! = 5 \cdot 4 \cdot 3! \stackrel{(2)}{=} \\ n=3 & \quad \stackrel{(2)}{=} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (3-1)! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = \\ & \quad \stackrel{(2)}{=} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = \\ & \quad \stackrel{(2)}{=} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \boxed{0!} = \\ n=0 & \quad \stackrel{(1)}{=} 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120 \end{aligned}$$

Def: FATTORIALE

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 1 = \prod_{i=1}^n i$$

HW: Dimostrare per INDUZIONE che $\prod_{i=1}^n i = n!$ a partire dalla def. $\star$

TEOREMA

Dato S un insieme generico e finito, $|S|=n$, il numero di PERMUTAZIONI di k elementi su n , $k \leq n$ è dato da:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Se $k=n$, PERMUTAZIONI su S , sono: $n!$

Dimostrazione:

Da def. di permutazione, si ha: $f: I_k \rightarrow S$ INIETTIVA
è una delle possibili permutazioni

$f: I_k \rightarrow S$ quindi otteniamo $(s_1, s_2, s_3, \dots, s_k)$
 $1 \mapsto s_1$
 $2 \mapsto s_2$
 $\dots$
 $k \mapsto s_k$

ORDINATA
 e senza duplicati
 (f è INIETTIVA)

Per scegliere $s_1 = f(1)$ ci sono m modi $m - 1 + 1 = m$
 Per scegliere $s_2 = f(2)$ ci sono $m-1$ modi $m - 2 + 1 = m-1$
 Per scegliere $s_3 = f(3)$ ci sono $m-2$ modi $m - 3 + 1 = m-2$
 ...

Per scegliere $s_k = f(k)$ ci sono $m-k+1$ modi

$$(s_1, s_2, s_3, \dots, s_k) \in S \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{k-1}$$

$$S = S$$

$$S_1 = S \setminus \{s_1\}, \quad S_2 = S_1 \setminus \{s_2\}, \quad S_3 = S_2 \setminus \{s_3\}, \quad \dots$$

Quanti sono gli ELEMENTI di $S \times S_1 \times S_2 \times \dots \times S_{k-1}$

$$|S \times S_1 \times \dots \times S_{k-1}| = |S| \cdot |S_1| \cdot |S_2| \cdot \dots \cdot |S_{k-1}| = m \cdot (m-1)(m-2) \dots (m-k+1)$$

$\uparrow$
 questo è il numero di permutazioni

$$= \frac{m!}{(m-k)!}$$

Se $m=k$, il numero è $\frac{m!}{(m-k)!} = \frac{m!}{(m-m)!} = \frac{m!}{0!} = m!$ $\square$

COROLLARIO 1

Sia S un insieme generico, $|S|=m$ (finito), e X un insieme generico t.c. $|X|=k$ (finito), $k \leq m$. Allora il NUMERO di funzioni iniettive $f: X \rightarrow S$ è $\frac{m!}{(m-k)!}$.

COROLLARIO 2

Il numero di funzioni $f: X \rightarrow S$ dove $|X| = k$, $|S| = n$ è dato da n^k .

HW: dimostrare il corollario 2