

SOMME NOTEVOLI

PROVA PARZIALE

Cognome A-L : 13:30

Cognome M-Z : 15:30

Durata 1h

$$1) \sum_{i=1}^m 1 = m$$

$$2) \sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2} \quad (\text{già dim.})$$

ESEMPIO :

Somma dei primi n numeri dispari.

$$\star \sum_{i=1}^m (2i-1) = ?$$

$P(m)$ ancora non l'abbiamo

PRIMA dobbiamo CALCOLARE $\star$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (2i-1) &= \sum_{i=1}^m 2i - \sum_{i=1}^m 1 = 2 \underbrace{\sum_{i=1}^m i}_{(2)} - \underbrace{\sum_{i=1}^m 1}_{(1)} = \\ &= 2 \cdot \underbrace{\frac{m(m+1)}{2}}_{(2)} - \underbrace{m}_{(1)} = m(m+1) - m = m(m+1-1) = m^2 \end{aligned}$$

① e ② sono l'applicazione delle somme notevoli

A questo punto abbiamo $P(m) : \sum_{i=1}^m (2i-1) = m^2$

Dimostriamo $P(m)$ per induzione

1) CASO BASE

2) PASSO INDUTTIVO

Hw

$$3) \sum_{i=1}^m i^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Dimo. $P(m)$ è vera? $m \geq 1$

1) CASO BASE $m=1$, $P(1)$ è vera?

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

$$\sum_{i=1}^m i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + m^2$$

2) PASSO INDUTTIVO.

$$P(m): \sum_{i=1}^m i^2 \stackrel{HP}{=} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \Rightarrow \quad P(m+1): \sum_{i=1}^{m+1} i^2 \stackrel{TH}{=} \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \\ = \frac{(m+1)(m+1+1)(2(m+1)+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} i^2 = \sum_{i=1}^m i^2 + (m+1)^2 \stackrel{HP}{=} \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + (m+1)^2 =$$

$\underbrace{\sum_{i=1}^m i^2}_{P(m)} \quad \underbrace{\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}}_{P(m)}$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1) + 6(m+1)^2}{6} = \frac{(m+1)[m(2m+1) + 6(m+1)]}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)(2m^2 + \overbrace{m}^{7m=3m+4m} + 6m + 6)}{6} = \frac{(m+1)[\overbrace{2m^2}^{2m \cdot m} + \overbrace{3m}^{6 \cdot 3m} + \overbrace{4m}^{2m \cdot 2} + \overbrace{6}^{3 \cdot 2}]}{6} =$$

$$= \frac{(m+1)[(m+2)(2m+3)]}{6} = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6} \quad \checkmark$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{TH}$

$$4) \sum_{i=1}^m i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$$

[Si può pensare come AREA,
come fatto, ad es., per $\sum_{i=1}^n i$]

Dimo.

CASO BASE: $m=1$

$$\sum_{i=1}^1 i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$1^3 = \frac{2^2}{4}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

PASSO INDUTTIVO:

$$P(m) : \sum_{i=1}^m i^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} \quad \xRightarrow{?} \quad P(m+1) : \sum_{i=1}^{m+1} i^3 = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4}$$

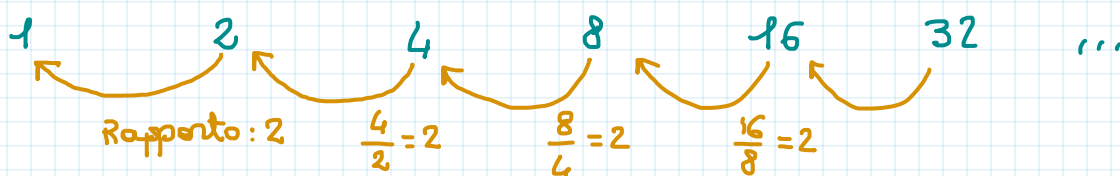
$$\sum_{i=1}^{m+1} i^3 = \underbrace{\sum_{i=1}^m i^3}_{\text{HP induttiva}} + (m+1)^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4} + (m+1)(m+1)^2 =$$

$$= \frac{m^2(m+1)^2 + 4(m+1)(m+1)^2}{4} = \frac{(m+1)^2(m^2 + 4m + 4)}{4} = \frac{(m+1)^2(m+2)^2}{4} \quad \square$$

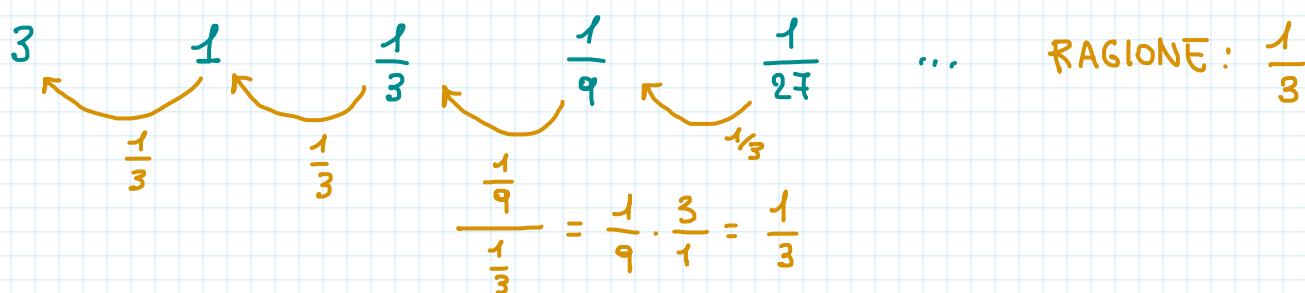
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

SOMME NOTEVOLI : Somma dei primi n TERMINI di una PROGRESSIONE GEOMETRICA

Def: PROGRESSIONE GEOMETRICA è una SEQUENZA di numeri in cui il RAPPORTO tra un termine e il precedente è COSTANTE



tal costante è detta **RAGIONE** della prog. geometrica



ESEMPIO:

$$\sum_{i=0}^m 2^i = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^m = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^m = ?$$

5)

$$\sum_{i=0}^m q^i = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q} \quad q \neq 1$$

da dim.
per
INDUZIONE

termini di una progressione geometrica di RAGIONE q

ESEMPIO:

$$\sum_{i=0}^m 2^i \stackrel{5)}{=} \frac{1 - 2^{m+1}}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{m+1}}{-1} = 2^{m+1} - 1 \quad q = 2$$

$$P(m) : \sum_{i=0}^m q^i = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \quad q \neq 1$$

Dim:

CASO BASE: $m=0$

$$\sum_{i=0}^0 q^i = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$

$$\begin{array}{c} i=0 \\ \downarrow \\ q^0 = \frac{1-q^1}{1-q} \end{array}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

PASSO INDUTIVO:

$$\underbrace{P(m) : \sum_{i=0}^m q^i = \frac{1-q^{m+1}}{1-q}}_{\text{HP INDUTIVA}}$$

$\Rightarrow$

$$\underbrace{P(m+1) : \sum_{i=0}^{m+1} q^i = \frac{1-q^{m+2}}{1-q}}_{\text{TH INDUTIVA}}$$

$$\sum_{i=0}^{m+1} q^i = \sum_{i=0, \dots, m} q^i + q^{m+1} \stackrel{\text{HP}}{=} \frac{1-q^{m+1}}{1-q} + \frac{q^{m+1}}{1} = \frac{1-q^{m+1} + (1-q) \cdot q^{m+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1 - \cancel{q^{m+1}} + \cancel{q^{m+1}} - q^{m+1+1}}{1-q} = \frac{1-q^{m+2}}{1-q} \quad \square$$