

PRINCIPIO di INDUZIONE

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ non è una def formale

$\mathbb{N}$ è definito dai seguenti assiomi (di Peano)

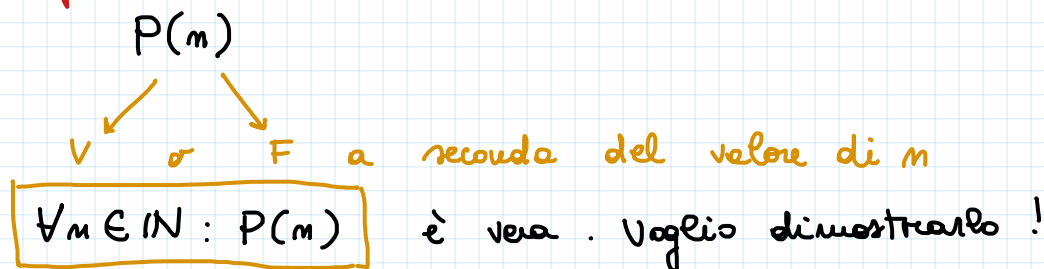
- 1) 0 è un numero : $0 \in \mathbb{N}$ } $\mathbb{N} \neq \emptyset$
- 2) il SUCCESSIVO S di un numero è un numero : } $S(m) = m + 1$
 $\forall m \in \mathbb{N} \quad S(m) \in \mathbb{N}$
- 3) 0 non è SUCCESSIVO di alcun numero : } non troviamo MAI
a ZERO
 $\neg (\exists m \in \mathbb{N} : S(m) = 0) \equiv \forall m \in \mathbb{N} : S(m) \neq 0$
- 4) Numeri diversi hanno successivi diversi : } non troviamo MAI
a un numero GIÀ
INCONTRATO
(S è INIETTIVA)
 $\forall a, b \in \mathbb{N} : (S(a) = S(b) \Rightarrow a = b)$

5) [PRINCIPIO di INDUZIONE]

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ e contiene lo 0 e inoltre A contiene il SUCCESSIVO di ogni suo numero, allora $A = \mathbb{N}$:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N} : \underbrace{(0 \in A)}_{\text{CASO BASE}} \wedge \underbrace{(\forall a \in A : S(a) \in A)}_{\text{PASSO INDUTIVO}} \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Regola DIMOSTRATIVA:



Sia $P(n)$ una PROPRIETÀ su $\mathbb{N}$
 VOGLIAMO DIMOSTRARE che $P(n)$ è VERA sempre (per tutti gli n).

1) CASO BASE : $P(0)$ è VERA

2) PASSO INDUTTIVO :

$\forall n \in \mathbb{N} : (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ è VERA

Se è vera $P(0)$, per 2) sarà vera $P(0+1) = P(1)$.

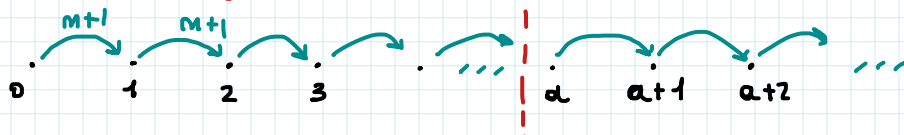
Se è vera $P(1)$, per 2) sarà vera $P(1+1) = P(2)$.

Se è vera $P(2)$, per 2) sarà vera $P(2+1) = P(3)$.

...

Allora abbiamo dimostrato $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$.

GENERALIZZAZIONE



Se vogliamo mostrare $P(n)$ non $\forall n \in \mathbb{N}$ MA $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq a$?

1) CASO BASE : $P(a)$ è vera

2) PASSO INDUTTIVO :

$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq a \wedge (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ è vera

Allora $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq a \wedge P(n)$.

Se $P(5)$ è vera, allora è vera 2) $P(5+1) = P(6)$

Se $P(6)$ è vera, allora è vera 2) $P(6+1) = P(7)$

e così via ...

Non è detto
 che $P(n)$
 sia VERA su
 $0, 1, 2, 3, 4$

SOMMATORIE e PRODUTTORIE

m ← punto di arrivo
 $\sum$ argomento
 $i=0$ ← punto di partenza
 espressione numerica
 può dipendere dall'indice i

$$\sum_{i=0}^m i = 0 + 1 + 2 + \dots + m$$

$i=0$ $i=1$ $i=1$ $i=m$
 $\sum_{i=0}^4 i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4$

```

int somma = 0;
for (int i = 0; i <= m; i++) {
    somma = somma + i;
}

```

i
 argomento

$$\sum_{i=5}^{10} (2i + 7) = (2 \cdot 5 + 7) + (2 \cdot 6 + 7) + (2 \cdot 7 + 7) + (2 \cdot 8 + 7) + (2 \cdot 9 + 7) + (2 \cdot 10 + 7) = \dots =$$

$i=5$ $i=6$ $i=7$ $i=8$
 $i=9$ $i=10$

$$= (2 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 10) + (7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7) =$$

$$= 2 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 6 \cdot 7$$

STESSO
RISULTATO

$$\sum_{i=5}^{10} (2i + 7) = 2 \cdot \sum_{i=5}^{10} i + \sum_{i=5}^{10} 7 = 2 \cdot (5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + 6 \cdot 7$$

$\uparrow$
 $6 \cdot 7$

ESEMPIO:

$$\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$$

PROPRIETÀ $P(m)$: $\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$
 Uguaglianze tra 2 espressioni

VERA
 FALSA

$\prod_{i=1}^m$ argomento $\rightarrow$ espressione numerica
che può dipendere da i

$$\prod_{i=1}^m i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m$$

$i=1$ $i=2$ $i=m$

```
int prodotto = 1;
for (int i = 1; i <= m; i++) {
    prodotto = prodotto * i;
}
```

$$\sum_{i=0}^{m+1} i = \boxed{0 + 1 + 2 + \dots + m} + \boxed{(m+1)} = \left(\sum_{i=0}^m i \right) + (m+1)$$

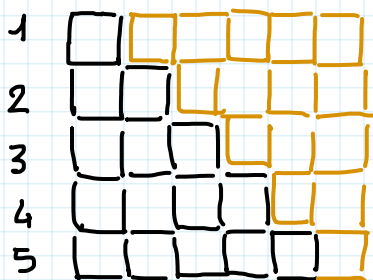
$$= \boxed{0 + 1} + \boxed{2 + \dots + (m+1)} = 0 + 1 + \sum_{i=2}^{m+1} i$$

ESEMPIO: Dimostrare che $\sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$ SOMMA di GAUSS

Ragionamento:

$$m=5$$

$$1+2+3+4+5 = 15$$



l'area di è uguale all'area

$$1+2+3+4+5 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$\frac{\text{base} \times \text{altezza}}{2} = \frac{(5+1) \cdot 5}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m i = \frac{(m+1) \cdot m}{2}$$

SOMMA NOTEVOLÉ

Dimu: $P(m) : \sum_{i=1}^m i = \frac{m(m+1)}{2}$ è VERA $\forall m \geq 1$

1) CASO BASE

$m=1$: $P(1)$ è VERA?

$$P(1): \sum_{i=1}^1 i = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$$1 = 1 \quad \text{VERA } \checkmark$$

[perché se
 $n=0$ avremmo
 $\sum_{i=1}^0 i = ??$]

2) PASSO INDUTTIVO

HP INDUTTIVA

$\Rightarrow$

TH INDUTTIVA

$$P(m): \sum_{i=1}^m i \stackrel{\text{HP}}{=} \frac{m(m+1)}{2}$$

$\Rightarrow$

$$P(m+1): \sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{(m+1)(m+1+1)}{2} =$$

$$\stackrel{\text{TH}}{=} \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \star$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m+1} i &= \boxed{\sum_{i=1}^m i} + (m+1) \stackrel{\text{HP}}{=} \boxed{\frac{m(m+1)}{2}} + (m+1) = \frac{m(m+1) + 2(m+1)}{2} = \\ &= \underbrace{\frac{(m+1)(m+2)}{2}}_{\star} \quad \square \end{aligned}$$

PROPRIETÀ:

1) LINEARITÀ di $\sum$ a_i e b_i ESPRESSIONI che dipendono da i

$$\sum_{i=1}^m (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{i=1}^m b_i$$

$$\sum_{i=1}^m k \cdot a_i = k \cdot \sum_{i=1}^m a_i$$

k non dipende da i

ATTENZIONE

$$\sum_{i=1}^m 1 = \overset{i=1}{1} + \overset{i=2}{1} + \overset{i=3}{1} + \dots + \overset{i=m}{1} = m \cdot 1 = m$$

$$\sum_{i=1}^m 7 = 7 \sum_{i=1}^m ?? = 7$$

$$7 \cdot 1$$

$$= 7 \cdot \sum_{i=1}^m 1 = 7 \boxed{m}$$

NON SI RIDUCE:
il suo risultato è m

2) SOMMATORIA TELESOPICA

$$\boxed{1} + \cancel{2} - \cancel{2} + \cancel{3} - \cancel{3} + \dots + \cancel{n} - \cancel{n} + \boxed{(n+1)}$$

ESEMPIO:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n}$$

per $n \geq 2$

perché se fosse $n=0$
non ha senso perché
il parte da 1.

ma anche se $n=1$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \dots = \sum_{i=1}^{\boxed{0}} \dots \text{ non ha senso}$$

OSS:

$$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{(1+i)-i}{i(i+1)} = \frac{\cancel{i+1}}{i(\cancel{i+1})} - \frac{\cancel{i}}{\cancel{i}(i+1)} =$$

$$= \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \overbrace{1 - \cancel{\frac{1}{2}}}^{i=1} + \overbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}^{i=2} + \overbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}}^{i=3} + \dots$$

$$i = n-1$$

telescopica

$$.. + \cancel{\frac{1}{n-1}} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

HW. $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n}$ va dimostrato per induzione.