

RELAZIONI D'ORDINE

Def Si dice RELAZIONE d'ORDINE una relazione R su A insieme t.c. valgano le proprietà:

1) RIFLESSIVA

2) ANTI-SIMMETRICA

3) TRANSITIVA

anche detta **ORDINAMENTO** e si indica (A, R) per denotare un insieme **ORDINATO**.

ESEMPIO. Sia $\mathbb{N}$ dei numeri naturali

$$0 \leq 1 \leq 2 \leq 3, \dots, \leq 10000, \dots \leq$$

$$\dots \geq 6 \geq 5 \geq \dots 1 \geq 0$$

$R(x, y) \Leftrightarrow x < y$ è d'ordine su $\mathbb{N}$? Si No ✓ NON È RIFLESSIVA

$$R(x, y) \Leftrightarrow x \leq y \text{ su } \mathbb{N} \quad \text{def}$$

1) RIFLESSIVA $\forall x: R(x, x) \Leftrightarrow \forall x: x \leq x$ VERO (perché $x \leq x$)

2) ANTI-SIMMETRICA

$$\forall x, y \in \mathbb{N}: (R(x, y) \wedge R(y, x)) \Rightarrow x = y ?$$

$$R(x, y) \wedge R(y, x) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \wedge y \leq x \Leftrightarrow x = y \quad \checkmark$$

$\begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases}$
risolvendo
il sistema

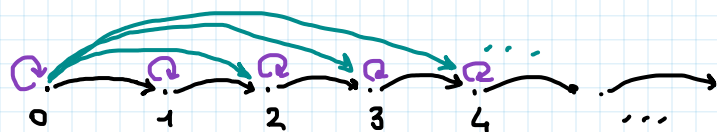
3) TRANSITIVA

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}: (R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$$

$$R(x, y) \wedge R(y, z) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \leq y \wedge y \leq z \Leftrightarrow x \leq z \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R(x, z) \quad \square$$

HW · dire se $R(x,y) \Leftrightarrow x \geq y$ è d'ordine su $\mathbb{N}$.

In CONCLUSIONE $(\mathbb{N}, \leq)$ è un ORDINAMENTO



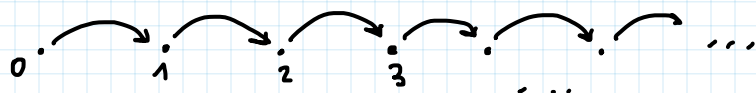
→ sono conseguenze della TRANSITIVA

↺ RIFLESSIVA

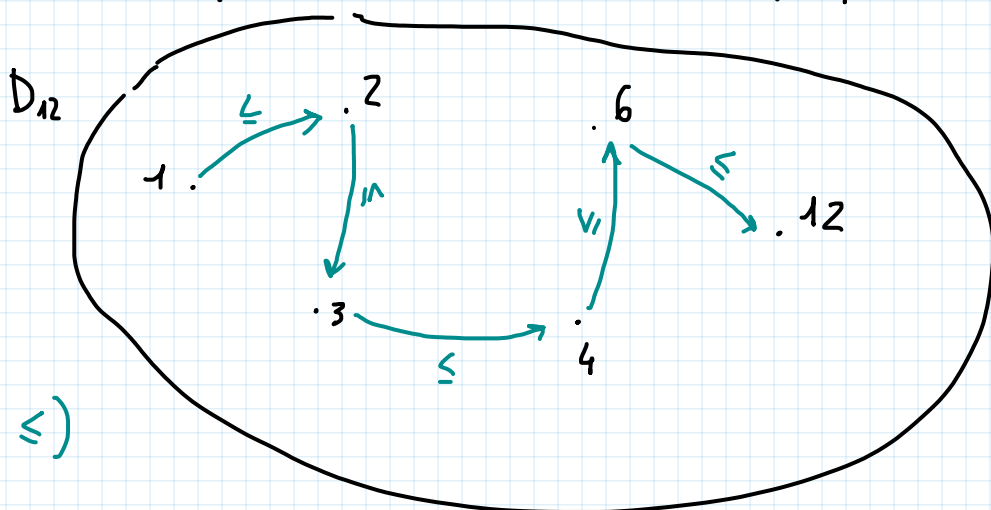
DIAGRAMMI di HASSE per rappresentare insiemi ORDINATI

- R dev'essere d'ordine su A
- Disegneremo tutte le connessioni → che NON sono deducibili dalla TRANSITIVA
- Non disegneremo ↺ la RIFLESSIVA

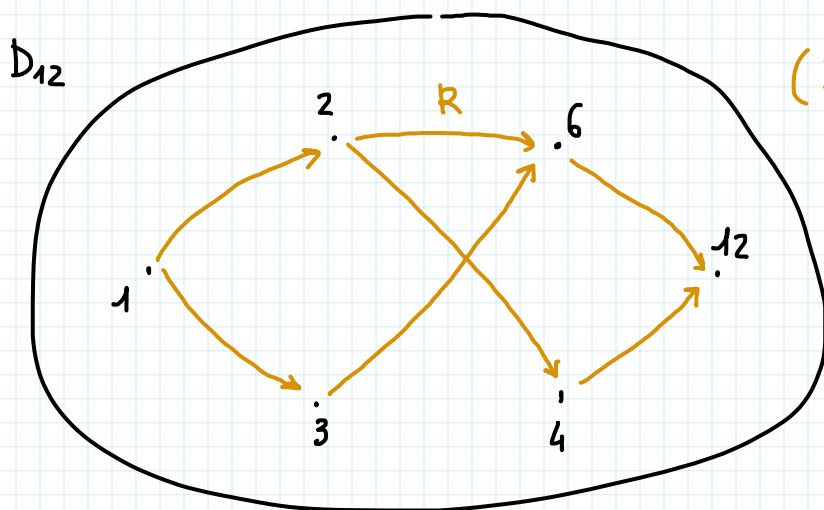
ESEMPIO $(\mathbb{N}, \leq)$



ESEMPIO : $D_{12} = \{x : x \text{ è un divisore di } 12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \subseteq \mathbb{N}$



$(D_{12}, \leq)$



(D_{12}, R) è di ORDINE?

Sì
perché ho
def: R come

$R(x, y) \Leftrightarrow "x \text{ è DIVISORE di } y"$

Def $R(x, y) \Leftrightarrow "x \text{ DIVIDE } y" \Leftrightarrow \boxed{x \mid y} \rightarrow \text{Attenzione: NON è } \frac{x}{y}$

ESEMPLI: $2 \mid 14$, $2 \nmid 7$

$$\boxed{x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \cdot y = k \cdot x}$$

ESEMPLI: $2 \mid 14 \Leftrightarrow 14 = 7 \cdot 2$
 $2 \nmid 7 \Leftrightarrow 7 = \dots \cdot 2$ No!

$R(x, y)$ su $D_{12} = \{1, 3, 4, 2, 6, 12\}$ definite come

$R(x, y) \Leftrightarrow x \mid y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = k \cdot x$

1) RIFLESSIVA $\forall x \in D_{12} : R(x, x) ?$

$$R(x, x) \Leftrightarrow x \mid x \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k \cdot x$$

sì perché $k=1$ ✓

2) TRANSITIVA $\forall x, y, z \in D_{12} \cdot R(x, y) \wedge R(y, z) \Rightarrow R(x, z) ?$

$$R(x, y) \wedge R(y, z) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : y = kx \\ \exists q \in \mathbb{Z} : z = qy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx \\ z = q \cdot (kx) \end{cases}$$

$$2 \mid 4 \wedge 4 \mid 12 \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 2 \cdot 2 & 2 \in \mathbb{Z} \\ 12 = 3 \cdot 4 & 3 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow z = [q \cdot k] \cdot x \Rightarrow \begin{matrix} \exists m \in \mathbb{Z}: \\ z = m \cdot x \\ m = q \cdot k \end{matrix} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R(x, z) \quad \checkmark$$

Se $q \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{Z}$ allora $q \cdot k \in \mathbb{Z}$

$$2 \mid 12 \Leftrightarrow 12 = 6 \cdot 2 \quad \text{perché } 6 = 2 \cdot 3 \in \mathbb{Z}$$

3) ANTI-SIMMETRICA $\forall x, y \in D_{12} : R(x, y) \wedge R(y, x) \Rightarrow x = y ?$

$$R(x, y) \wedge R(y, x) \Leftrightarrow x \mid y \wedge y \mid x \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} : y = k \cdot x \\ \exists q \in \mathbb{Z} : x = q \cdot y \end{cases}$$

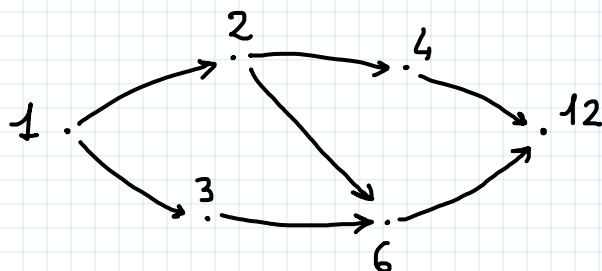
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = k \cdot x \\ x = q \cdot (k \cdot x) \end{cases} \Rightarrow x = \underbrace{(q \cdot k)}_{=1} \cdot x \Rightarrow q \cdot k = 1 \begin{cases} q = k = 1 \quad \checkmark \\ q = k = -1 \quad \times \end{cases}$$

perché se fosse $q = k = -1$, $y = (-1) \cdot x \Rightarrow y = -x \quad \nexists x, y \in D_{12}$

$$\text{Quindi resta } q = k = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \cdot x \\ x = 1 \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow x = y \quad \square$$

R di DIVISIBILITÀ su D_{12} è una relazione d'ordine

Diagramma di Hasse:



STRUTTURA di
ORDINAMENTO PARZIALE

Def. Sia (A, R) un insieme ORDINATO. Si dice che R è una relazione di ORDINE TOTALE (o ORDINAMENTO LINEARE) se e solo se.

$$\forall x \in A : \forall y \in A : (R(x, y) \vee R(y, x))$$

e inoltre (A, R) si dice TOTALMENTE ORDINATO

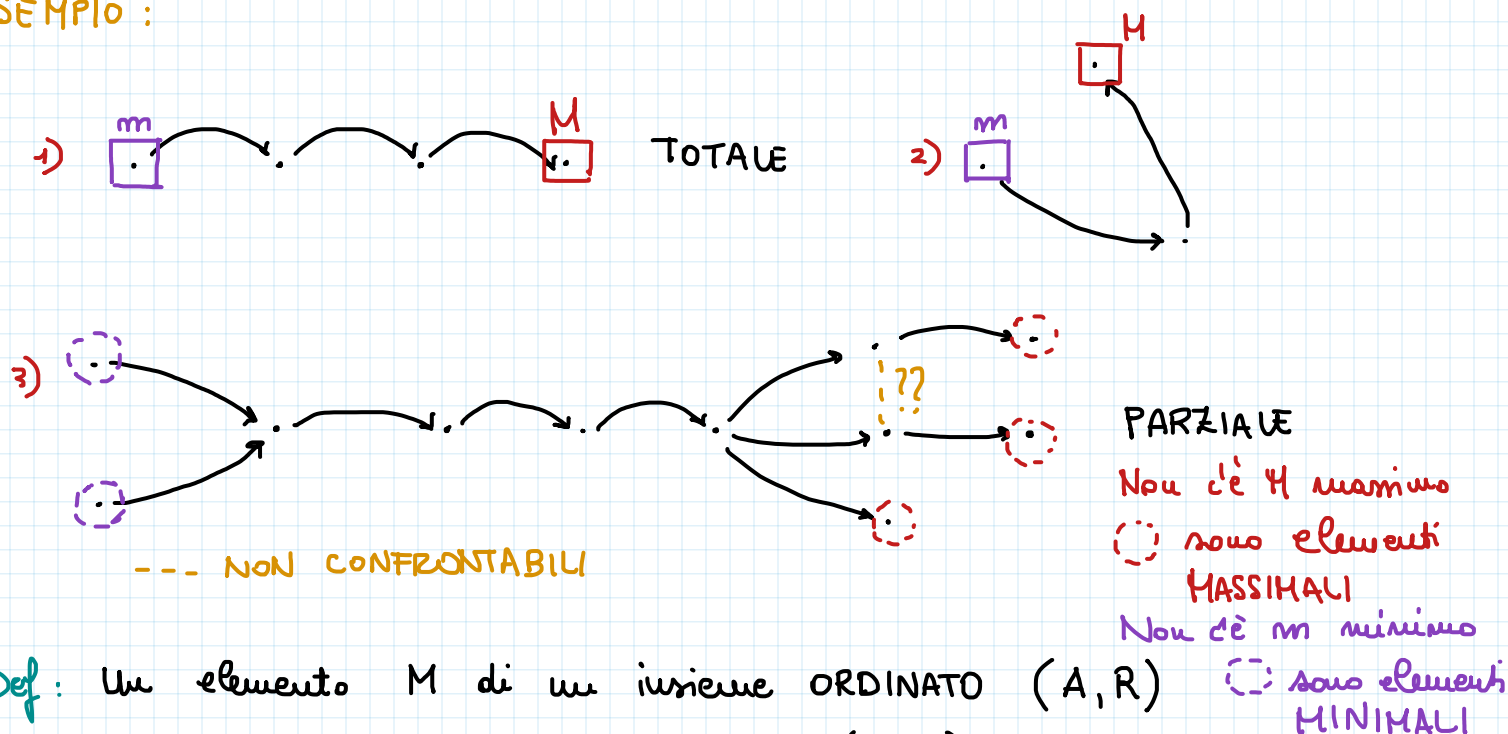
ESEMPIO : $(\mathbb{N}, \leq)$ è totalmente ordinato perché
 $\forall m, n \in \mathbb{N} : (m \leq n \vee n \leq m)$

Def : Se (A, R) è un insieme ORDINATO, si dice che R è di ORDINE PARZIALE e (A, R) è PARZIALMENTE ORDINATO (POSET) se R NON è Totale

$$\exists x \in A : \exists y \in A : (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, x))$$

ESEMPIO : $(D_{12}, |)$, troviamo un CONTROESEMPIO
 $2 \nmid 3 \wedge 3 \nmid 2$ quindi è un POSET.

ESEMPIO :



Def : Un elemento M di un insieme ORDINATO (A, R) si dice MASSIMO se $\forall x \in A : R(x, M)$
 si dice MASSIMALE se $\forall x \in A : (R(M, x) \Rightarrow x = M)$
 CONTRONOMIALE
 $\forall x \in A : (x \neq M \Rightarrow \neg R(M, x))$

x $\rightarrow$ M $\rightarrow$ k (crossed out)
 y $\rightarrow$ M
 z $\rightarrow$ M

OSS: $\text{MASSIMO} \Rightarrow \text{MASSIMALE}$
 ~~$\Leftarrow$~~

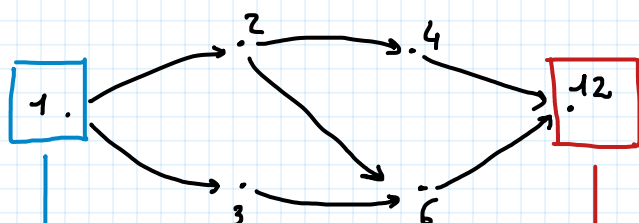
Def: Un elemento m di un insieme ORDINATO (A, R)
 si dice MINIMO se $\forall x \in A: R(m, x)$
 si dice MINIMALE se $\forall x \in A: (R(x, m) \Rightarrow x = m)$

CONTRONOMINALE

$$\forall x \in A: (x \neq m \Rightarrow \neg R(x, m))$$

OSS: $\text{MINIMO} \Rightarrow \text{MINIMALE}$
 ~~$\Leftarrow$~~

ESEMPIO: $(D_{12}, |)$ è ordinato. È un ORDINE PARZIALE



minimale
è anche MINIMO

$$\forall x \in D_{12}: 1 \mid x$$

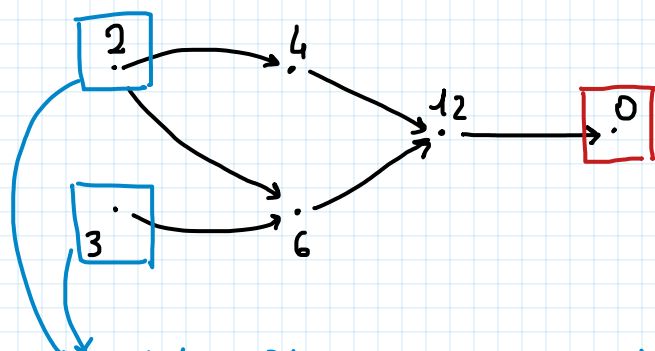
maximale
è anche MASSIMO

$$\forall x \in D_{12}: x \mid 12$$

ESEMPIO: $D = \{0, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$R(x, y) \Leftrightarrow x \mid y$$

$(D, |)$
è ordine parziale
($3 \nmid 4 \wedge 4 \nmid 3$)



maximale
(e MASSIMO)

Minimale MA NON minimi

perché $\frac{x}{0}$ NON è ammissibile

NON esiste $x = k \cdot 0$ a meno
che $x = 0$.

NON esiste $x \neq 0$ t.c. $R(0, x)$

$\exists k \in \mathbb{Z} : 0 = k \cdot x$ è possibile invece. $k = 0 \in \mathbb{Z}$

$$\forall x \in D : (\exists k \in \mathbb{Z} : 0 = k \cdot x)$$



$\forall x \in D : R(x, 0)$ ma questa è la def. di MASSIMO.