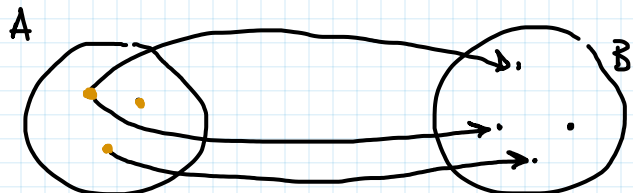
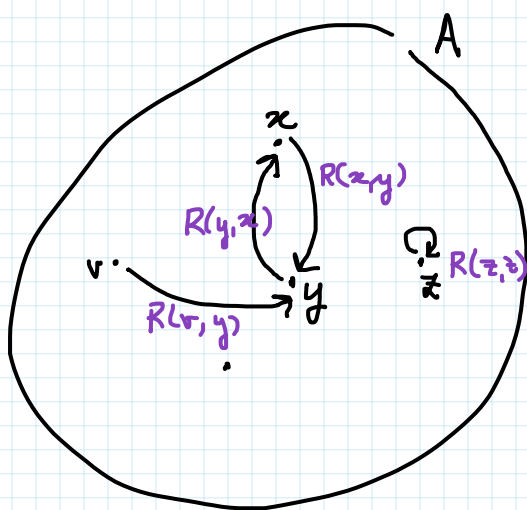


RELAZIONI DI EQUIVALENZA e DI ORDINE

$R(x, y) \subseteq A \times B$, $x \in A \wedge y \in B$



$R(x, y) \subseteq A$ (in realtà $A \times A$), $x \in A \wedge y \in A$



$R(x, y) \subseteq SN$
 $\equiv "x \text{ segue } y"$

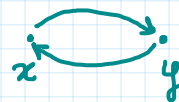
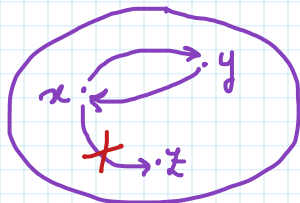
$R(v, y)$ VERA

$R(y, v)$ FALSA

Def: Una relazione R su un insieme generico A si dice
 RIFLESSIVA se $\forall x \in A : R(x, x)$



Def: Una relazione R su A si dice
 SIMMETRICA se $\forall x \in A : \forall y \in A : R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$



(Conseguenza: $R(y, x) \Rightarrow R(x, y)$)

Def: Una relazione R su A si dice

TRANSITIVA se $\forall x \in A : \forall y \in A : \forall z \in A :$

$(R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)$



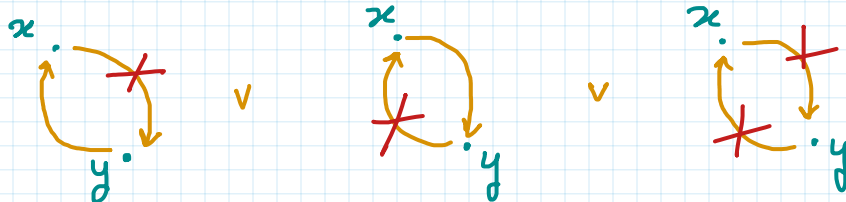
Def: Una relazione R su A si dice
ANTI-SIMMETRICA se $\boxed{\forall x \in A : \forall y \in A :$

$$\underbrace{(R(x,y) \wedge R(y,x))}_p \Rightarrow \underbrace{x=y}_q$$

Contronominale: $x \neq y \Rightarrow \neg (R(x,y) \wedge R(y,x))$

$$x \neq y \Rightarrow \neg R(x,y) \vee \neg R(y,x)$$

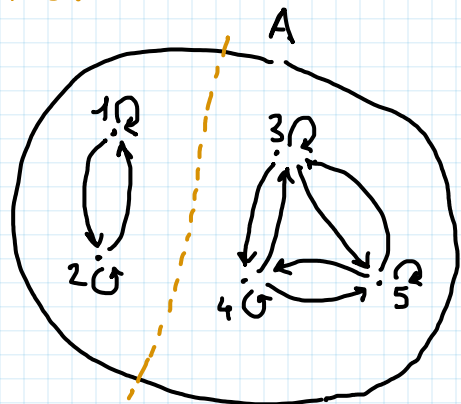
$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$



Def: Una relazione R su A si dice RELAZIONE di EQUIVALENZA se valgono le proprietà.

1. RIFLESSIVA
2. SIMMETRICA
3. TRANSITIVA

ESEMPIO:



R è definita su A dal disegno

RIFLESSIVA? $\rightarrow$ Sì ✓
 $\rightarrow$ No

$R(1,1), R(2,2), \dots$

$$\forall x \in A : R(x,x)$$

SIMMETRICA? $\rightarrow$ Sì ✓
 $\rightarrow$ No

$$R(1,2) \Leftrightarrow R(2,1)$$

$$R(3,4) \Leftrightarrow R(4,3)$$

$$R(3,5) \Leftrightarrow R(5,3)$$

$$R(4,5) \Leftrightarrow R(5,4)$$

(8 implicazioni)

$$R(2,4) \Rightarrow R(4,2)$$

è vera? VERA

$$p \Rightarrow q$$

TRANSITIVA? $\rightarrow$ Sì ✓
 $\rightarrow$ No

$$\forall x \in A : \forall y \in A : \forall z \in A .$$

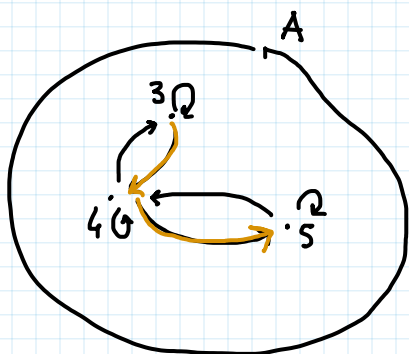
$$\underbrace{R(x,y) \wedge R(y,z)}_{\text{AND}} \Rightarrow R(x,z)$$

$$R(3,5) \wedge R(5,4) \Rightarrow R(3,4)$$

$$R(5,4) \wedge R(4,3) \Rightarrow R(5,3)$$

R è di EQUIVALENZA

ESEMPIO:



R su A def. dal disegno

è RIFLESSIVA

è SIMMETRICA

• Non è TRANSITIVA

$$\underbrace{R(3,4) \wedge R(4,5)}_{\text{VERA}} \Rightarrow \underbrace{R(3,5)}_{\text{FALSA}} \quad \text{FALSO!}$$

$$*: \forall x \in A : \forall y \in A : \forall z \in A : (R(x,y) \wedge R(y,z)) \Rightarrow R(x,z)$$

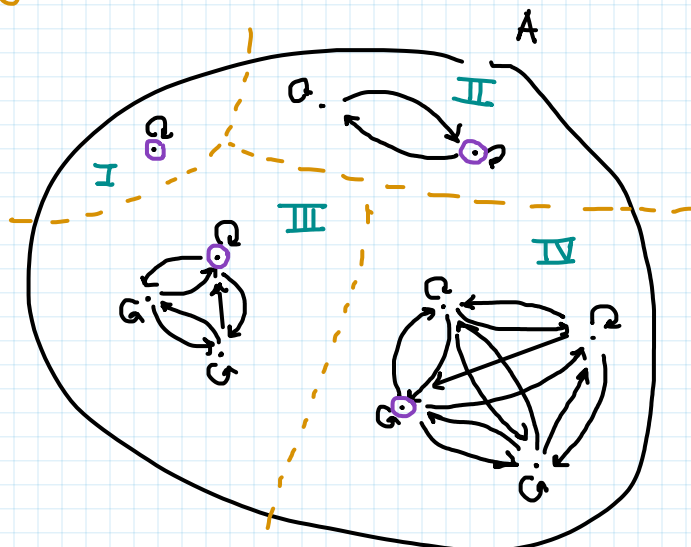
Per mostrare che * NON vale, deve valere la NEGAZIONE

$$\neg(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : (\neg P(x))$$

$$\neg * : \exists x \in A : \exists y \in A : \exists z \in A : \neg (R(x,y) \wedge R(y,z) \Rightarrow R(x,z))$$

CONTROESEMPIO

ESEMPIO



CLASSI di EQUIVALENZA

I classe vale RIFLESSIVA
 II classe vale RIFLESSIVA
 SIMMETRICA
 III classe
 IV classe

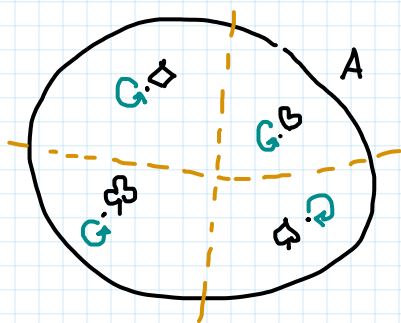
Scegliamo per ogni CLASSE
 un RAPPRESENTANTE

ESEMPI NOTEVOLI di RELAZIONI di EQUIVALENZA

1. RELAZIONE di UGUAGLIANZA

R su A unisce qualsiasi. $\forall x, y \in A$. $\boxed{R(x, y) \stackrel{\text{def}}{\iff} x = y}$

Es. se $A = \{ \diamond, \clubsuit, \spadesuit, \heartsuit \}$



A ha 4 elementi, dunque 4 classi di equivalenza tramite R di uguaglianza. I rappresentanti sono gli elementi stessi

A gennaio: R è RIFLESSIVA perché $\forall x \in A: R(x, x)$ vale

$\updownarrow \stackrel{\text{def}}{=} x = x$ che è VERO $\square$

R è SIMMETRICA perché

$\forall x, y \in A: R(x, y) \stackrel{?}{\implies} R(y, x)$

$$\underbrace{R(x, y)} \stackrel{\text{def}}{\iff} x = y \iff y = x \stackrel{\text{def}}{\iff} \underbrace{R(y, x)} \quad \square$$

R è TRANSITIVA perché

$\forall x, y, z \in A: (R(x, y) \wedge R(y, z)) \implies R(x, z)$

$$\underbrace{R(x, y) \wedge R(y, z)} \stackrel{\text{def}}{\iff} x = y \wedge y = z$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

$$\iff x = z \stackrel{\text{def}}{\iff} \underbrace{R(x, z)} \quad \square$$

mettere a
SISTEMA significa
mettere in AND

1. Definire la CARDINALITÀ con una RELAZIONE di EQUIVALENZA

Def: Siano A e B due insiemi,

$R(A,B)$: "A è in relazione con B se e solo se hanno lo stesso numero di elementi"

$$R(A,B) \Leftrightarrow |A| = |B|$$

cioè A e B sono EQUIPOTENTI: $\exists f: A \rightarrow B$ biunivoca

R è di equivalenza

$$\forall x: R(x,x)$$

1) RIFLESSIVA

$$\forall X: R(X,X) ?$$

$$R(X,X) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |X| = |X|$$

X generico insieme

cioè $\exists f: X \rightarrow X$ biunivoca perché posso prendere la FUNZIONE IDENTITÀ $f: X \rightarrow X$
 $x \mapsto x$

2) SIMMETRICA X, Y generici insiemi

$$R(X,Y) \Rightarrow R(Y,X) ?$$

$$R(X,Y) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |X| = |Y| \Leftrightarrow |Y| = |X| \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R(Y,X)$$

$$\exists f: X \rightarrow Y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists f': Y \rightarrow X$$

biunivoca biunivoca

3) TRANSITIVA X, Y, Z generici insiemi

$$(R(X,Y) \wedge R(Y,Z)) \Rightarrow R(X,Z) ?$$

$$R(X,Y) \wedge R(Y,Z) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} |X| = |Y| \wedge |Y| = |Z| \Leftrightarrow |X| = |Z| \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} R(X,Z)$$

la = è transitiva

Si può
scrivere anche
così

$$\begin{cases} |X| = |Y| \\ |Y| = |Z| \end{cases}$$

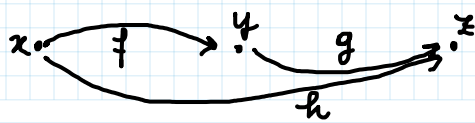
$$\exists f: X \rightarrow Y \wedge \exists g: Y \rightarrow Z \Rightarrow$$

biunivoca biunivoca

$$h: X \rightarrow Z$$

$$h(x) = g(f(x))$$

anche h è
BIUNIVOCA

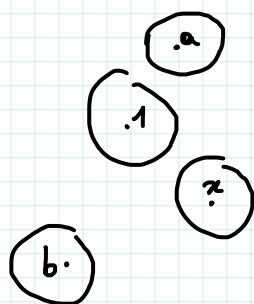


CARDINALITÀ

definita come RAPPRESENTANTE di una classe di equivalenza

$$R(A,B) \Leftrightarrow |A| = |B|$$

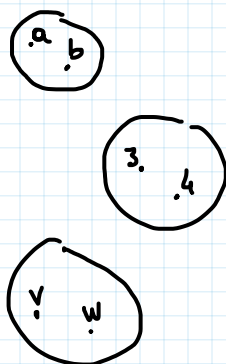
1 elemento:



...

1

2 elementi:



...

2

...

...

10000 elementi:

A

B

C

10000

...