

RELAZIONI, FUNZIONI

RELAZIONE è un predicato BINARIO e si scrive $R(x, y)$
 in 2 variabili

(x, y) è una COPPIA ORDINATA

$R(x, y)$ è definita su $A \times B$, $x \in A \wedge y \in B$

"ELEMENTI" di una RELAZIONE

$$C = \{ (x, y) \cdot (x, y) \in A \times B \wedge R(x, y) \}$$

$(x, y) \in A \times B$

$R(x, y)$ dev'essere vera

restringe il campo

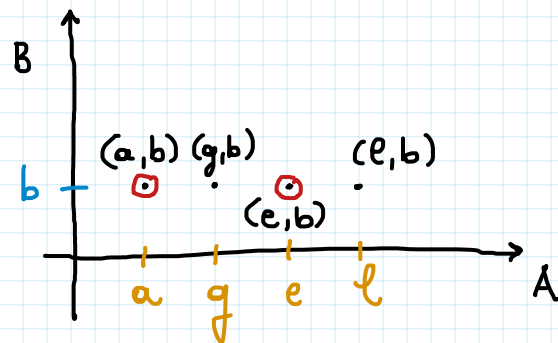
- CONDIZIONE
- VINCOLO

ESEMPIO

1) $R(x, y)$ su $A \times B$

$$A = \{ a, g, e, l \}, \quad B = \{ b \}$$

$R(x, y) \Leftrightarrow$ "x è una vocale
e y è una consonante"



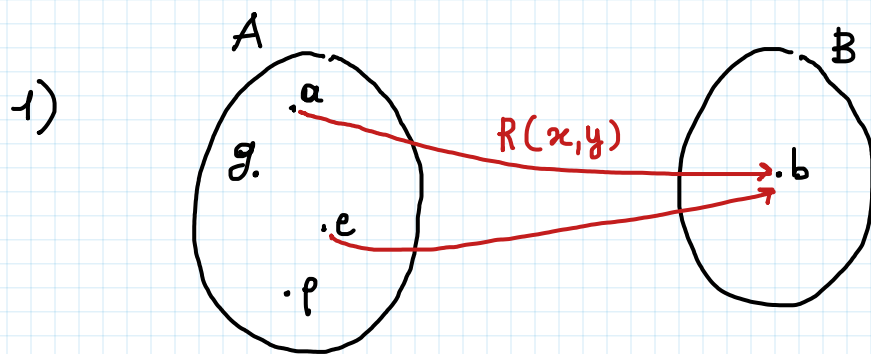
$$C = \{ (x, y) \cdot (x, y) \in A \times B \wedge R(x, y) \} = \{ (a, b), (e, b) \}$$

$x \in A \wedge y \in B$

2) $R(x, y)$ su A è una NOTAZIONE per dire $R(x, y)$ su $A \times A$

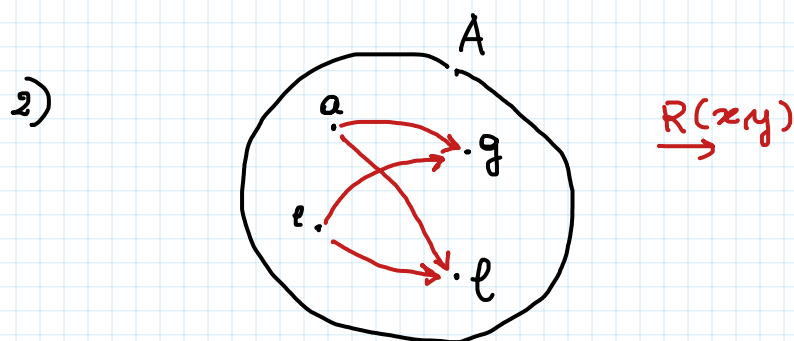
$$C = \{ (a, g), (a, l), (e, g), (e, l) \}$$

VISUALIZZAZIONE



Significa:

- a è in relazione con b
- e è in relazione con b
- Nessun altro elemento di A è in relazione con elementi di B



FUNZIONE f una RELAZIONE in $A \times B$ si dice "FUNZIONE di A in B " se:

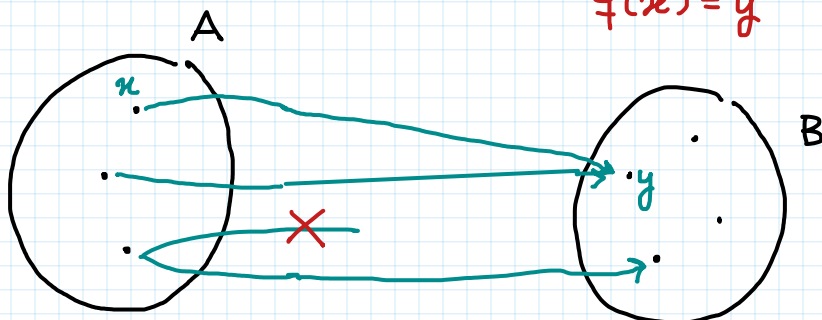
$$\forall x \in A : \exists! y \in B : \underbrace{(x, y) \in f}_*$$

"esiste UNO e uno solo" = "esiste UNICO"

[e si scrive $f: A \rightarrow B, f(x) = y$]

* (x, y) è un elemento della RELAZIONE f
 $(x, y) \in \{ (x, y) : (x, y) \in A \times B \wedge f(x, y) \}$

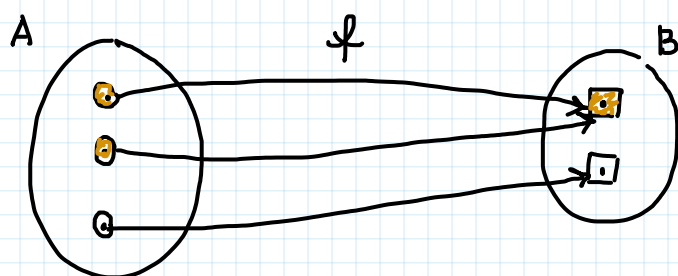
NOTAZIONE
 $f(x) = y$



CONTARE gli ELEMENTI degli INSIEMI

Def Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **SURIETTIVA** se $f(A) = B$

ESEMPIO:



f è **SURIETTIVA**

Domanda: A ha più elementi di B? ✓

B ha più elementi di A? NO

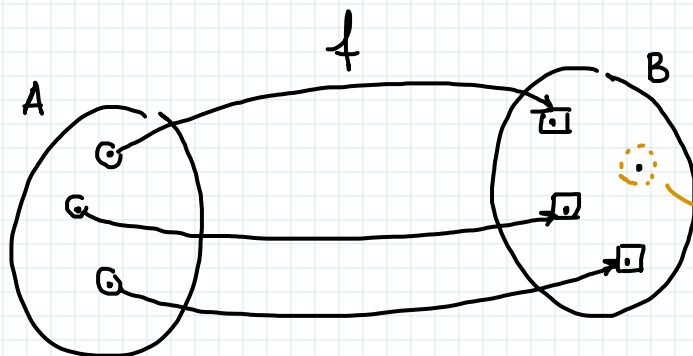
A e B hanno lo stesso numero di elementi? ✓

↳ A ha un numero di elementi $\geq$ a quelli di B

Def Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **INIETTIVA** se elementi distinti di A vanno in elementi distinti di B

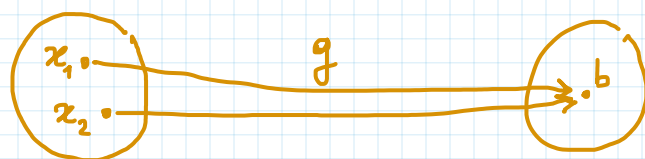
$$\forall x_1 \in A \cdot \forall x_2 \in A : \left(\underbrace{f(x_1)}_{\in B} = \underbrace{f(x_2)}_{\in B} \Rightarrow \underbrace{x_1}_{\in A} = \underbrace{x_2}_{\in A} \right)$$

ESEMPIO:



f è **INIETTIVA**

f NON È **SURIETTIVA**



g NON È **INIETTIVA**

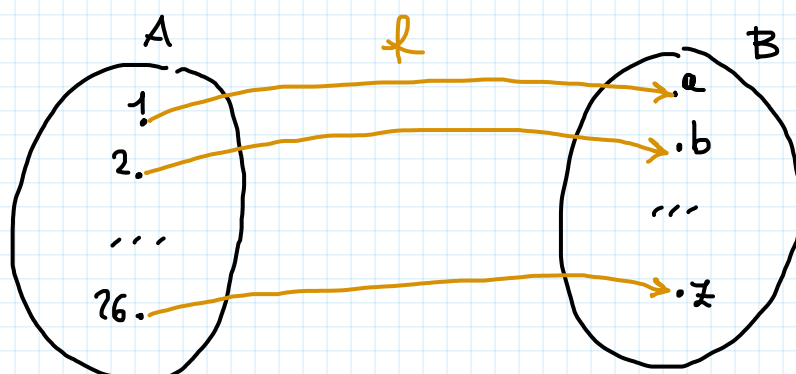
Domanda: A ha più elementi di B? NO (se f è INIETTIVA)

Def: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice BIETTIVA o BIUNIVOCA se è SIA INIETTIVA che SURIETTIVA

ESEMPIO:

$$A = \{1, 2, 3, \dots, 26\}$$

$$B = \{a, b, c, \dots, z\}$$



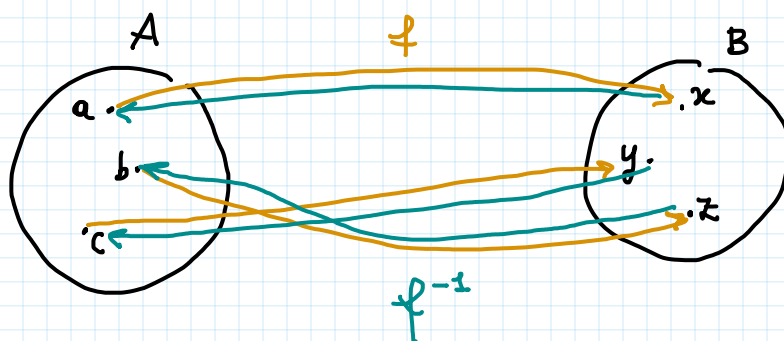
f è BIUNIVOCA
UNO-a-UNO

perché:

1. Elementi DISTINTI di A vanno in elementi DISTINTI di B
2. Tutti gli elementi di B vengono RAGGIUNTI

Domanda: quanti elementi hanno A e B? HANNO esattamente LO STESSO NUMERO di ELEMENTI.

ESEMPIO:

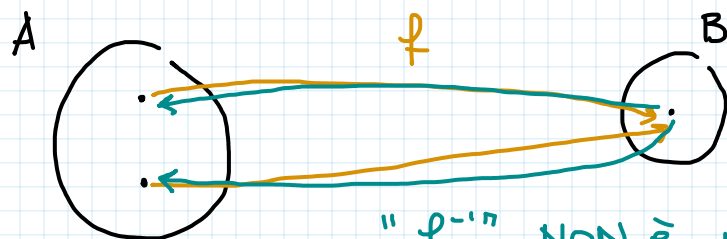


f corrispondenza
UNO a UNO

(a, x)
 (b, z)
 (c, y)

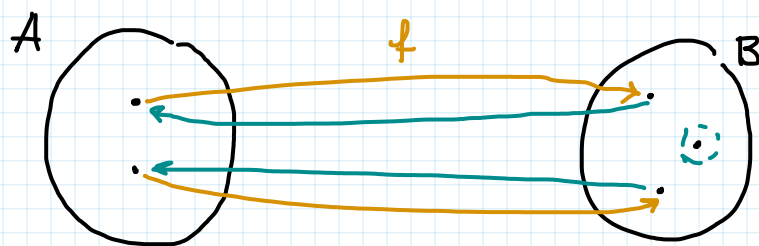
f^{-1} è ANCORA una funzione e viene chiamata INVERSA di f

ESEMPIO



f è una FUNZIONE
(SURIETTIVA)

" f^{-1} " NON è una funzione!
(è una RELAZIONE)



f è una FUNZIONE
(INIETTIVA)

" f^{-1} " NON è una funzione
(è una RELAZIONE)

CARDINALITÀ

→ Se l'insieme è FINITO, si dice CARDINALITÀ il numero n dei suoi elementi. La cardinalità di A si indica con $|A|$ ES: $|A| = n$

Def: Due insiemi A e B si dicono EQUIPOTENTI se esiste una $f: A \rightarrow B$ BIUNIVOCA e si scrive $|A| = |B|$ ($|B| = |A|$)

• IN l'insieme dei NUMERI NATURALI $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

Def: Un insieme A è detto ENUMERABILE (NUMERABILE) se è EQUIPOTENTE a $\mathbb{N}$ ($f: A \rightarrow \mathbb{N}$ BIUNIVOCA)
 $|A| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$ "ALEPH ZERO"

ESEMPIO:

$$P = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$$

$$|P| = ?$$

$$x \in P \Leftrightarrow x = 2 \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}$$

definisco una RELAZIONE

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$$

$$m \mapsto 2m$$

"LEGGE" della funzione

$$2 \cdot \boxed{2 \cdot 2} \rightarrow \cdot 4$$

$$3 \cdot \boxed{2 \cdot 3} \rightarrow \cdot 6$$

è INIETTIVA $\wedge$ è SURIETTIVA $\leadsto$ BIUNIVUCA

$$|\mathbb{P}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

HW · Definiamo $D = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è dispari}\}$ Dimostrare che $|D| = |\mathbb{N}|$

TEOREMA di CANTOR

Sia A un insieme, allora $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

OSS: Se A è finito è semplice verificare

Dimostrazione:

REGOLA PER ASSURDO

$$p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

$p \wedge \neg q$ è una CONTRADDIZIONE se $p \Rightarrow q$ è sempre VERA

$$|A| \stackrel{?}{\geq} |\mathcal{P}(A)|$$

HP p : A è un insieme

HP p : A è un insieme

TH q : $|A| < |\mathcal{P}(A)|$

$\neg$ TH $\neg q$: $|A| \geq |\mathcal{P}(A)|$

HW: provare a pensare cosa SIGNIFICA che $|A| \geq |\mathcal{P}(A)|$

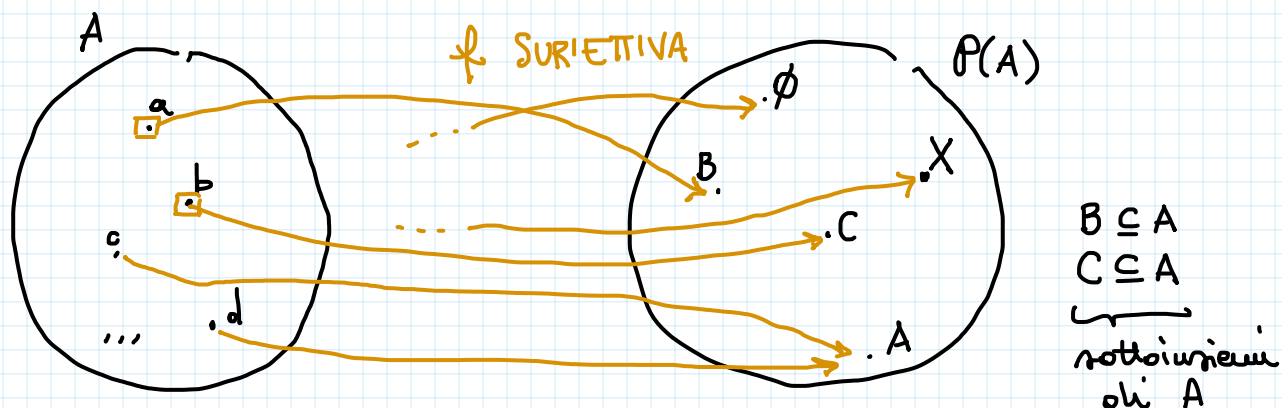
HP $\wedge \neg$ TH $\leadsto$ paraggi di DEDUZIONE $\leadsto$ CONTRADDIZIONE

Dimostrazione

A è un insieme. Supponiamo per assurdo $|A| \geq |\mathcal{P}(A)|$.

$\exists f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ SURIETTIVA

(potremmo anche ragionare su una BIEZIONE, ottenendo $|A| = |\mathcal{P}(A)|$)



ESEMPIO

a
 $f(a) = B$

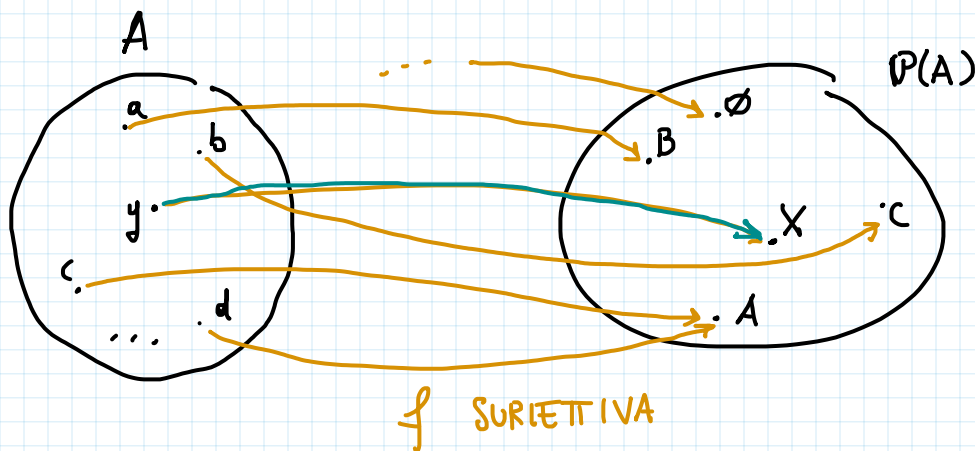
Se $B = \{a, b\} \subseteq A$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $a \in A \quad b \in A$
 sottoinsieme di $A \equiv$ elemento di $P(A)$
 $a \in B \iff a \in f(a) = B$

Sia $X = \{x \in A : \underbrace{x \notin f(x)}_{\text{proprietà}}\}$

$a \notin X$

$X \subseteq A \iff X \in P(A)$

Siccome f è SURIETTIVA deve esistere $y \in A$ t.c. $f(y) = X$

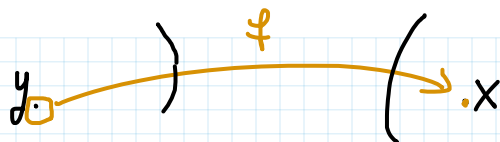


$X = \{x \in A : \underbrace{x \notin f(x)}_{P(x)}\}$

$y \in X$ o no?

$z \in f(z)$? Supp. $f(z) = \emptyset$, $z \in \emptyset$? No $z \notin \emptyset \iff \underbrace{z \notin f(z)}_{P(z)}$

$y \in X$.



$y \in X$ o no?

$$\begin{aligned}
 1. \quad y \in X & : y \in \{x \in A : \overbrace{x \notin f(x)}^{P(x)}\} \Leftrightarrow y \notin f(y) \Leftrightarrow y \notin X \quad \text{NO} \\
 2. \quad y \notin X & : y \notin \{x \in A : \underbrace{x \notin f(x)}_{P(x)}\} \Leftrightarrow y \in f(y) \Leftrightarrow y \in X \quad \text{NO}
 \end{aligned}$$

$$1. \quad p \Rightarrow \neg p$$

$$2. \quad \neg p \Rightarrow p$$

CONTRADDIZIONE

NON può avvenire
che X sia l'immagine
di un elemento di A



NON può avvenire
 $|A| \geq |P(A)|$

NON può avvenire
che f sia SURIETTIVA

L'unica possibilità è che $|A| < |P(A)|$. $\square$

OSS: La CONTRADDIZIONE ottenuta è quella del paradosso di Russell.

THM: A è un insieme $\Rightarrow |A| < |P(A)|$

COROLLARIO: $\mathbb{N}$ è un insieme $\Rightarrow |\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})|$

THM: $|P(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$

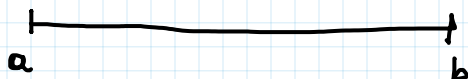
"
"
"

Si dice che $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ è la CARDINALITÀ del NUMERABILE
 $|\mathbb{R}|$ è la CARDINALITÀ del CONTINUO.

$\mathbb{N}$ 0 1 2 3 4 ...

$\mathbb{R}$... ————— ...

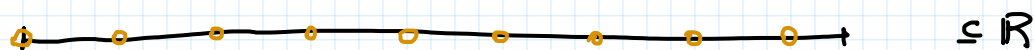
SEGMENTO



ha infiniti punti $\subseteq \mathbb{R}$

DISCRETIZZAZIONE

Gli insiemi "discreti" sono quelli FINITI o NUMERABILI



operando una discretizzazione

$$A = \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \subseteq \mathbb{N}$$

Si può aumentare la precisione, restando sempre in ambito discreto

$$|A| \leq |\mathbb{N}|$$

THM:

Se A e B sono insiemi FINITI, ovvero $|A| < \aleph_0$, $|B| < \aleph_0$.

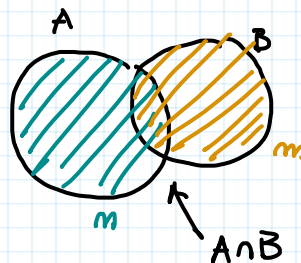
$$|A| = m$$

$$|B| = m$$

Allora

$$\cdot |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\cdot |A \times B| = |A| \cdot |B| = m \cdot m$$



Domanda: Se A e B fossero NUMERABILI (ma INFINITI)?

$$|A| = |B| = |\mathbb{N}|$$

$$|A \cup B| = ?$$

$$|A \cup B| = |\mathbb{N}|$$

ESEMPIO:

$$P = \{x \in \mathbb{N} : x = 2m, m \in \mathbb{N}\} \quad \text{l'insieme dei PARI}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} : x = 2m+1, m \in \mathbb{N}\} \quad \text{l'insieme dei DISPARI}$$

$$P \cap D = \emptyset$$

$$|P \cup D| = |\mathbb{N}| \quad \text{e} \quad \text{però} \quad |P| = |\mathbb{N}| \quad \text{e} \quad |D| = |\mathbb{N}|$$

THM: $\mathcal{H}_0 = |\mathbb{N}|$

$$\cdot \mathcal{H}'_0 + \mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0$$

$$\cdot \mathcal{H}'_0 \cdot \mathcal{H}'_0 = \mathcal{H}_0$$