

INSIEMISTICA - 2

INSIEME delle PARTI , INSIEME POTENZA (POWERSET)

Si basa sulla RELAZIONE di INCLUSIONE $\subseteq$

$B \subseteq A$ si legge "B è contenuto in A"
"B è SOTTOINSIEME di A"

Def: $P(A)$ è l'insieme di TUTTI i SOTTOINSIEMI di A
è detto INSIEME delle PARTI

Oss: $P(A)$ è un INSIEME di INSIEMI

ESEMPIO:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = ?$$

$$\emptyset \subseteq A? \text{ Sì perché: } x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$$

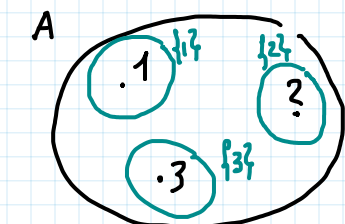
sempre FALSA

sempre VERA

$\emptyset$ è un SOTTOINSIEME di A

$$\emptyset \in P(A)$$

$A \subseteq A? \text{ Sì } A = A \quad x \in A \Rightarrow x \in A \quad \text{è una TAUTOLOGIA}$
($p \Rightarrow p$)



$\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}$

$$\{1\} \subseteq A?$$

$$x \in \{1\} \Rightarrow x \in A$$

$$x = 1$$

$1 \in A? \text{ è vero dunque } \{1\} \subseteq A$

$$\{1\} \in P(A), \{2\} \in P(A), \{3\} \in P(A)$$

$$B \subseteq A \equiv \forall x \cdot (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

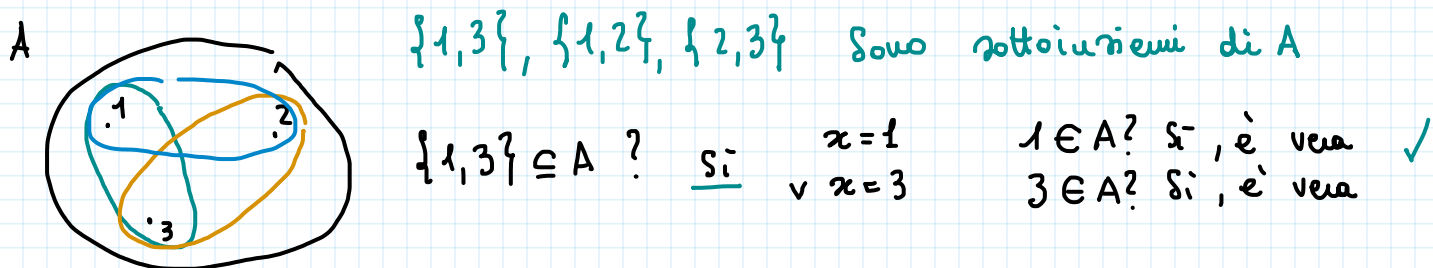
$\emptyset$

EQUIVALENZA
LOGICA

$\emptyset$

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

dalla tavola di
verità si $\Rightarrow$



$$\{1,3\} \in \mathcal{P}(A) \quad \{1,2\} \in \mathcal{P}(A) \quad \{2,3\} \in \mathcal{P}(A)$$

$$\mathcal{P}(A) = \left\{ \underbrace{\emptyset}_{0 \text{ elementi}}, \underbrace{\{1\}, \{2\}, \{3\}}_{1 \text{ elemento}}, \underbrace{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}}_{2 \text{ elementi}}, \underbrace{A = \{1,2,3\}}_{3 \text{ elementi}} \right\}$$

A ha 3 elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha 8 elementi

DOMANDE:

$1 \in \mathcal{P}(A)$? Sì / No

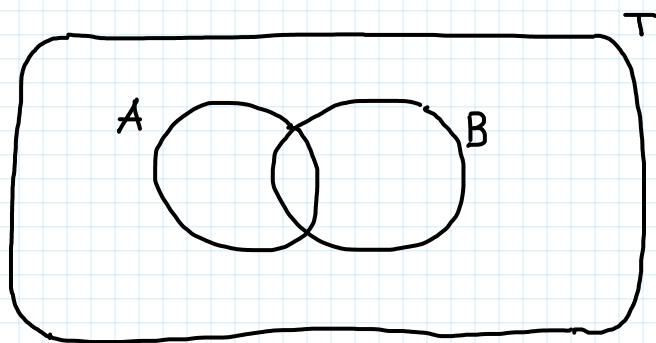
$1 \in A$ ✓
 $1 \notin A$

$\{1\} \in \mathcal{P}(A)$ Sì / No

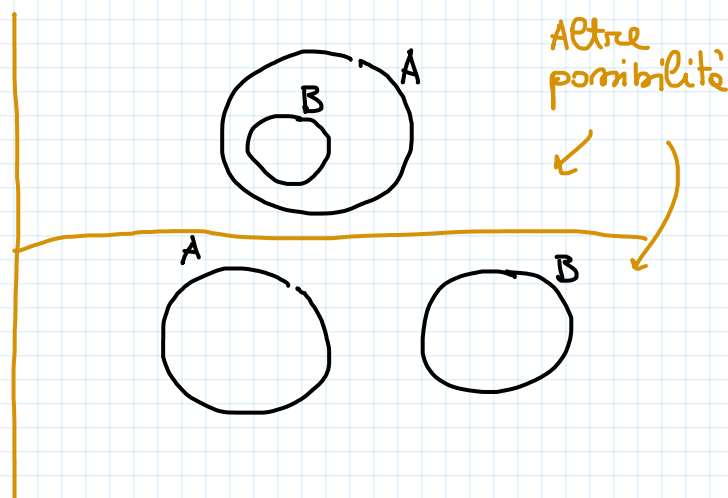
OSS: Se A è finito di n elementi, $\mathcal{P}(A)$ ha 2^n elementi.

OPERAZIONI tra INSIEMI

A e B insiemi generici, che sono sottoinsiemi di T

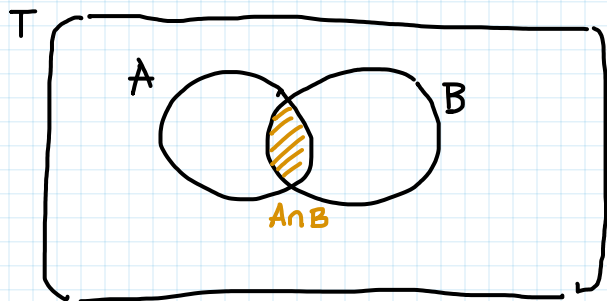


Forma più generica



1) INTERSEZIONE

AND

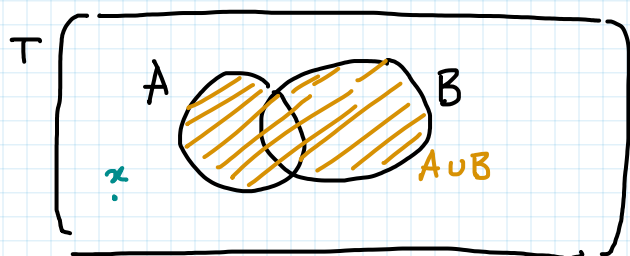
 $A \cap B$ è un INSIEME

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

↑
AND logico
 $p \wedge q$

2) UNIONE

OR

 $A \cup B$ è un INSIEME

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

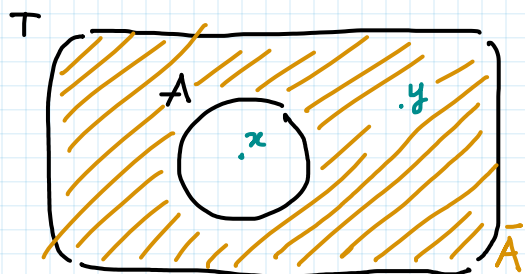
↑
OR logico

$$x \notin A \quad x \notin B$$

p è Falsa, q è Falsa $\Rightarrow x$ NON è nell'unione di A e B

3) COMPLEMENTARE

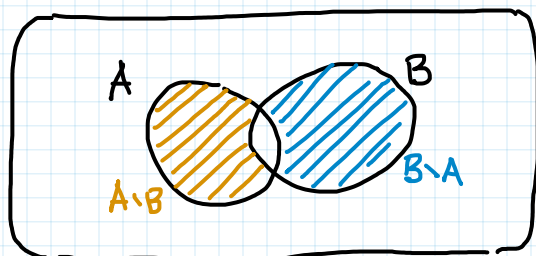
NOT

 $\bar{A}$ è un INSIEME

$$\bar{A} = \{x : x \notin A\}$$

NOT logico
 $\neg p$

4) DIFFERENZA

 $A \setminus B$ è un insieme

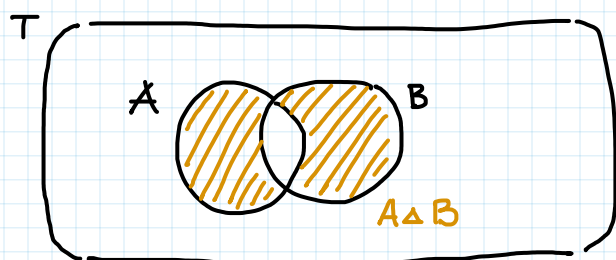
$$p \wedge \neg q$$

 $B \setminus A$ è un insieme

$$A \setminus B = \{x : x \in A \overset{\text{AND}}{\wedge} x \overset{\text{NOT}}{\notin} B\}$$

$$B \setminus A = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

5) DIFFERENZA SIMMETRICA



$A \Delta B$ è un insieme

$$1) A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$2) A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

HW · derivare $A \Delta B$ con CONNETTIVI LOGICI. $A \Delta B = \{x : \dots\}$

proposizioni composte

PROPRIETÀ:

IDEMPOTENZA

$$A \cup A = A$$

COMMUTATIVA

$$A \cup B = B \cup A$$

ASSOCIATIVA

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

DISTRIBUTIVA

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

ASSORBIMENTO

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

ESEMPIO:

$$A \cup A = A ?$$

$$x \in A \cup A \iff x \in A$$

$$\underbrace{(x \in A \vee x \in A)}_{\pi \vee \pi} \iff \underbrace{x \in A}_{\pi}$$

$$p \iff q$$

è una TAUTOLOGIA

π	$\pi \vee \pi$	$\pi \vee \pi \iff \pi$
0	0	1
1	1	1

* abbiamo dimostrato la proprietà

HW · Dimostrare le altre proprietà.

LEGGI di DE MORGAN per INSIEMI

$$1) \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$2) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

HW: Mostrare le leggi di De Morgan per insiemi

INSIEME PRODOTTO

$A \times B$ è l'INSIEME (detto INSIEME PRODOTTO) delle COPPIE ORDINATE (a, b) t.c. $a \in A$ e $b \in B$.

ci sono due elementi di cui conosciamo l'ORDINE

(a, b)

I elemento

II elemento

OSS: $\{a, b\} = \{b, a\}$ SONO lo STESSO INSIEME
 $(a, b) \neq (b, a)$ SONO COPPIE DIVERSE

$$A \times B = \{ \boxed{(a, b)} : a \in A \wedge b \in B \}$$

$$B \times A = \{ \boxed{(b, a)} : b \in B \wedge a \in A \}$$

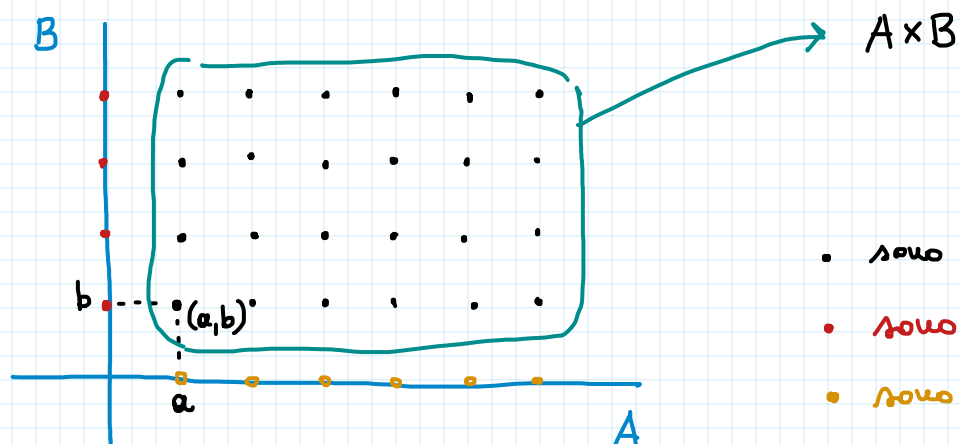
SONO DIVERSI

$$a \in A \wedge b \in B \equiv b \in B \wedge a \in A$$

descrizione dell'ELEMENTO (generico) di questo insieme

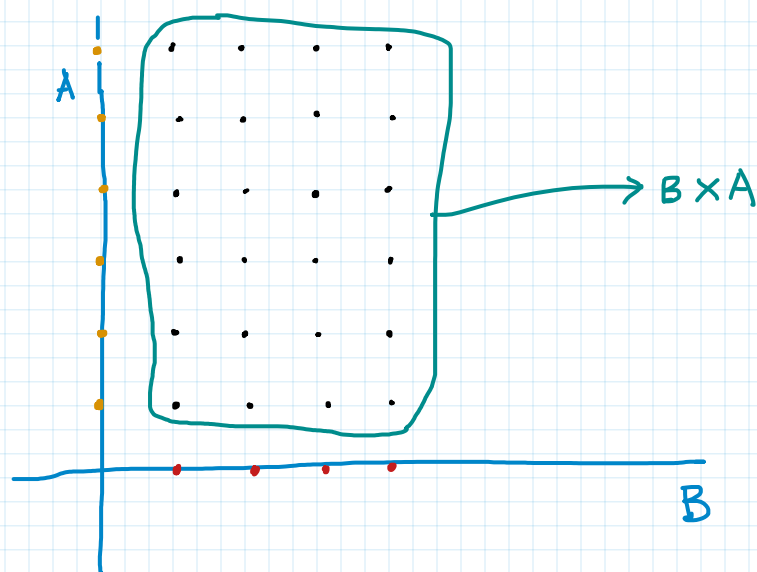
$$A \times B \neq B \times A$$

VISUALIZZAZIONE



- sono ELEMENTI di $A \times B$
- sono ELEMENTI di B
- sono ELEMENTI di A

PIANO CARTESIANO

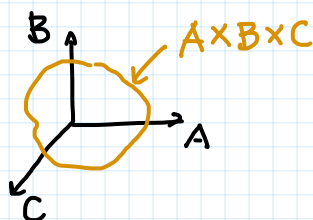


OSS: Se A ha m di elementi
 B ha n di elementi
 allora $A \times B$ e $B \times A$ hanno
 $m \cdot n$ elementi

ESTENSIONE

$$(a, b, c) \in A \times B \times C$$

TRIPLA ORDINATA



$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_m$$

TUPLA
 m -UPLA

INSIEME PRODOTTO tra m INSIEMI

x_1 è l'elemento di INDICE zero
 x_2 è l'elemento di INDICE 1

...

ESEMPIO

$$\begin{array}{c} \circ, \Delta, \square \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \quad 1 \quad 2 \end{array} \neq \begin{array}{c} \circ, \circ, \Delta, \square, \square, \square \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 0 \quad 1 \end{array} \neq \begin{array}{c} \square, \circ, \circ, \square, \Delta, \square \\ \uparrow \quad \uparrow \\ 1 \quad 2 \end{array}$$