

LINGUAGGIO MATEMATICO - 2

LINGUAGGIO OGGETTO

VARIABILI

x, y, z

n

ESEMPLI di uso delle VARIABILI

$$x \geq 1$$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$\begin{cases} x + 5 = y \\ y = 4 \end{cases}$$

altri simboli NON variabili

METALINGUAGGIO

Simboli logici

servono da "contenitori" o

"etichette" per VALORI in un determinato DOMINIO

Ci chiediamo, ad esempio: " $x \geq 1$ è VERA o FALSA?"

Q: è una proposizione?

1) Sì $\rightarrow$ circa 7

2) No $\rightarrow$ circa 12

$x \geq 1$ è una **PROPRIETÀ** e può diventare una proposizione

QUANDO assegna alla variabile x un VALORE

Assegno il valore 0 a x : la proprietà diventa $0 \geq 1$ **FALSA***

SOSTITUZIONE di un VALORE al posto contrassegnato da x

* è una PROPOSIZIONE

PROPRIETÀ, RELAZIONI, PREDICATI

$P, Q, R, S, \dots$

$P(x)$: " $x \geq 1$ "
proprietà

$R(x, y)$: " $x + 5 = y$ "
relazione

PREDICATI:

$Q(x, y, z)$

$S(x, y, z, w)$

...

$C(x, y, z)$: " $x^2 + y^2 = z^2$ "

ESEMPIO

$C(x, y, \kappa) : "x^2 + y^2 = \kappa^2"$] PREDICATO x, y, κ

Domínio è NUMERICO. x, y, κ assumere valori NUMERICI

$\kappa = 5$

otengo: $C(x, y, 5) : "x^2 + y^2 = 5^2" : \underbrace{"x^2 + y^2 = 25"}_{\text{RELAZIONE } x, y}$

$x = 4$

$C(4, y, 5) : \underbrace{"16 + y^2 = 25"}_{\text{PROPRIETÀ } y}$

$y = 2$

$C(4, 2, 5) : \underbrace{"16 + 4 = 25"}$

PROPOSIZIONE, in particolare è FALSA.

PREDICATI : espressioni contenenti una o più VARIABILI

- Se ne contengono 1 solo PROPRIETÀ
 - Se ne contengono 2 solo RELAZIONI
- si indicano con lettere maiuscole e hanno una loro ARIETÀ

$P(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ m è l'ARIETÀ

↑ PREDICATO n -ario

oss: Se P non dipende da alcuna variabile, P è una PROPOSIZIONE

oss: L'obiettivo è STABILIRE i VALORI di $x_1, x_2, \dots, x_m$
per cui $P(x_1, x_2, \dots, x_m)$ è VERO (o FALSO)

QUANTIFICATORI

UNIVERSALE

$\forall x$

"per ogni x " [...]

ESISTENZIALE

$\exists x$

"esiste x " [...]

ESEMPIO

$$\forall x : H(x)$$

"per ogni x vale la proprietà H su x "

DEF $M(x)$: " x è mortale"

$$\forall x : M(x)$$

///

$$\forall y : M(y)$$

"Tutti gli uomini sono mortali"

Sto VINCOLANDO la variabile x

La variabile a fianco del quantificatore è MUTA

La variabile VINCOLATA NON può essere SOSTITUITA da un VALORE

L'esperienza $\forall x : M(x)$ è una PROPOSIZIONE?

1) Sì $\rightsquigarrow 6$

2) No $\rightsquigarrow \approx 20$

Traduzione: "Tutti gli uomini sono mortali"

è una proposizione?

Tutte le variabili
della formula sono
VINCOLATE

← Sì, perché NON dipende da
alcuna variabile

ESEMPIO

Ho definito $M(x)$ come " x è mortale"

Siccome x è LIBERA (o anche NON VINCOLATA), posso scrivere

$M(y)$: " y è mortale" $\rightsquigarrow$ "Platone è mortale"

$M(w)$: " w è mortale" PROPOSIZIONE

$M(\text{Socrate})$: " Socrate è mortale"] PROPOSIZIONE

VALORE

$y \rightsquigarrow \text{"Platone"}$

$$M(x) \neq M(y)$$

Se VINCOLO la variabile

$$\forall x : M(x) \equiv \forall y : M(y)$$

ESEMPIO

 $\exists x: M(x)$ ————— "Almeno un uomo è mortale"

dove

DEF $M(x): "x \text{ è mortale}"$ La variabile x è VINCOLATA $\exists x: M(x)$ è una proposizione $\exists x: M(x) \equiv \exists y: M(y) \equiv \dots \equiv \exists z: M(z)$ la var. è MTA

ESEMPIO

 $C(x, y, r): "x^2 + y^2 = r^2"$
 $\forall x: C(x, y, r)$ ————— questa risulta essere una RELAZIONE tra x e y
 Solo questa var. è VINCOLATA

Sono liberi!

 $\exists x: C(x, y, r)$

REGOLA di NEGAZIONE

$$\neg (\forall x: P(x)) \equiv \exists x: (\neg P(x))$$

$$\neg (\exists x: P(x)) \equiv \forall x: (\neg P(x))$$

 $\exists x: \neg P(x)$

TROVARE UN CONTRO-ESEMPIO

Se	$p \equiv q$	allora	$\neg p \equiv \neg q$	*
----	--------------	--------	------------------------	---

$$\neg (\forall x P(x)) \equiv \exists x : (\neg P(x))$$

NEGAZIONE
del quant. $\forall$

$\downarrow^*$

$$\neg (\neg (\forall x : P(x))) \equiv \neg (\exists x : (\neg P(x)))$$

$\downarrow$ DN

$$\forall x : P(x) \equiv \neg (\exists x : (\neg P(x)))$$

Formula equivalente
al quant. $\forall$

NON posso trovare un
che falsifica $P(x)$ CONTRO-ESEMPIO

HW : $\exists x : P(x) \equiv ?$ (facendo gli stessi passaggi)

RELAZIONE di UGUAGLIANZA

è un predicato BINARIO (relazione)

è una SCRITTURA che esprime il fatto che due VARIABILI
siano INTERCAMBIABILI $\rightarrow$ Assumono sempre gli stessi VALORI

$$U(x, y) : "x = y"$$

$$\neg U(x, y) : \neg "x = y" : "x \neq y"$$

Se R è una proprietà qualsiasi :

$$\forall x : \forall y : (x = y) \Rightarrow (R(x) = R(y))$$