

LINGUAGGIO MATEMATICO

Giovanni Prodi - ANALISI MATEMATICA → Capitolo 0

LINGUAGGIO OGGETTO

" $x \in U$ "

METALINGUAGGIO

La variabile x appartiene all'insieme U

PROPOSIZIONE

$p, q, r \dots$

una PROPOSIZIONE è una

SENTENZA DICHIARATIVA

↓
frase

↓
asserzione
↗ VERA
↘ FALSA

p : "oggi piove" ← VERA

q : "4 è un numero dispari" ← FALSA

① "quattro"

② "il quadrato di due"

③ "il precedente di cinque"

CONCETTI
esprimono tutti 4

Sono i nostri
DATI

r : "① è ②" è una proposizione

VERA

s : "① è ③" è un'altra proposizione

$r \neq s$ VERA

t : "① è ①" è un'altra proposizione

$r \neq s \neq t$ VERA

Combinazioni di DATI → INFORMAZIONE

(quantità di informazione)

r ha + info di t

PROPOSIZIONI COMPOSITE

p $\diamond$ q
 r $\square$ s

$(a \circ b) \diamond c$

Sotto-proposiz. è sempre composta

costruita a partire
da PROPOSIZIONI SEMPLICI
o altre PROPOSIZIONI COMP.
mediante

CONNETTIVI LOGICI ★

Il valore di verità (VERA/
FALSA) dipende dalle sue
sotto-proposizioni

★ CONNETTIVI LOGICI

CONGIUNZIONE, "e", AND, $\wedge$

$p \wedge q$

BINARIO

"oggi piove E 4 è un numero
dispari"
FALSA

DISGIUNZIONE, "o", OR, $\vee$, "vel"

$p \vee q$

$p \vee r$

BINARIO

"oggi piove O 4 è un numero
dispari"

"oggi piove O
4 è il quadrato di 2"
VERA

NEGAZIONE, "non", NOT, $\neg$

UNARIO

$\neg p$
 $\neg (\neg p)$
 FALSA
 VERA

"oggi NON piove"

FALSO

"NON oggi NON piove"
 (è vero che)
 VERA

ESEMPIO

"2 è un numero primo" ^a POICHÉ "2 è divisibile solo per 1 e per sé stesso" ^b VERA
 VERA VERA

c : a POICHÉ b

"2 è un numero primo" ^a POICHÉ "2 è pari" ^d FALSA
 VERA VERA

e : a POICHÉ d

$\leadsto$ "POICHÉ" è OBLIQUO $\rightarrow$ Sposto il piano del SIGNIFICATO
 $\hookrightarrow$ NON possiamo usarlo

$\rightarrow$ I CONNETTIVI LOGICI sono CONNETTIVI ESTENSIONALI

TAVOLE di VERITÀ (tabelle di verità)

AND: $p \wedge q$ VERA se e solo se p è VERA e q è VERA

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

0: FALSO

1: VERO

"oggi piove e
4 è dispari"

2 proposizioni atomiche

→ 4 casi possibili

OR: $p \vee q$ VERA se e solo se Almeno una tra p e q è VERA

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

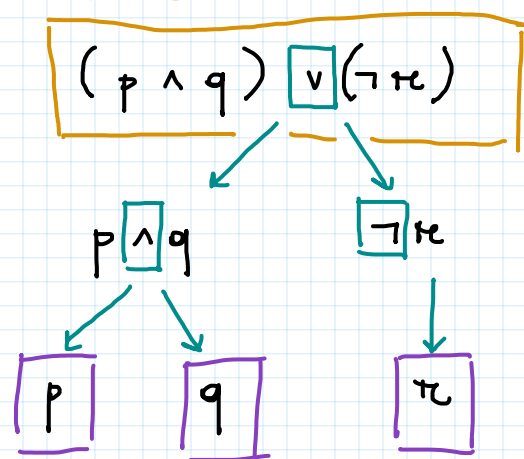
"oggi piove o 4 è dispari"

NOT: $\neg p$ è VERA se e solo se p è FALSA
($\neg p$ è FALSA se e solo se p è VERA)

p	$\neg p$
0	1
1	0

1 proposizione atomica
→ 2 casi possibili

ESEMPIO



ALBERO mi dà la
STRUTTURA della proposizione

RADICE: formula atomica

RAMI: ↘

FOGLIE: proposizioni atomiche

$\begin{smallmatrix} 0 \\ \nwarrow \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow \end{smallmatrix}$ p	$\begin{smallmatrix} 0 \\ \nwarrow \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow \end{smallmatrix}$ q	$\begin{smallmatrix} 0 \\ \nwarrow \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} 1 \\ \nearrow \end{smallmatrix}$ r	② ¬r	① p ∧ q	① ② (p ∧ q) ∨ (¬r)
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

3 proposizioni atomiche → 8 casi possibili

Con l'aumentare delle proposizioni atomiche, i casi possibili "ESPLODONO"

perché ogni prop. ha 2 valori possibili

Se ci sono n prop. atomiche, la tavola di verità ha 2^n RIGHE (casi possibili)

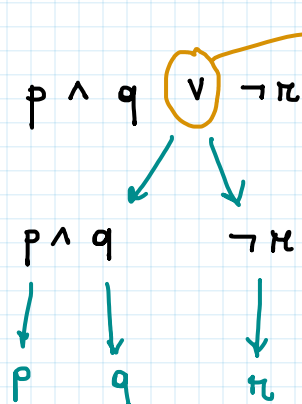
↳ CRESCE in maniera esponenziale la COMPLESSITÀ del metodo "tavole di verità"

CORTOCIRCUITO

↳ "lazy"

dipende dalla precedenza dei
CONNETTIVI LOGICI

$\neg$	$\wedge$	$\vee$
--------	----------	--------



L'ULTIMO da valutare è quello alla
RADICE dell'albero: questo è il
CONNETTIVO PRINCIPALE

Le PARENTESI forzano la precedenza

$$(a \vee b) \wedge c \neq a \vee b \wedge c = a \vee (b \wedge c)$$

Il CORTOCIRCUITO è un metodo "PIGRO" per valutare
una espressione.

AND

$p \wedge q$ da valutare, ma SO che p è FALSA
 $\Rightarrow$ NON mi interessa il valore di q

p	q	$p \wedge q$
0	?	0
1	0	0
1	1	1

OR :

$p \vee q$ da valutare, ma SO che p è VERA
 $\Rightarrow$ NON mi interessa il valore di q

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	?	1

PROPOSIZIONI EQUIVALENTI $\equiv$

$p \equiv q$ significa che in tutti i casi p e q hanno lo STESSO VALORE di VERITÀ
cioè p e q possono essere VERE ENTRAMBE oppure FALSE ENTRAMBE

COMMUTATIVA dell'AND

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

COMMUTATIVA dell'OR

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

DOPPIA NEGAZIONE

$$p \equiv \neg(\neg p)$$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

sono UGUALI, quindi vale $\equiv$

LEGGI DI DE MORGAN

$$1) \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$2) \neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

ESEMPIO di DIMOSTRAZIONE

$$1) \quad \underbrace{\neg(p \wedge q)}_{(1)} \equiv \underbrace{\neg p \vee \neg q}_{(2)}$$

①

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

sono uguali
quindi vale $\equiv$

②

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	1	0	0	0

Le proposizioni equivalenti sono "INTERCAMBIABILI"
perciò le posso usare per semplificare un calcolo

ESCLUDERE UN CONNETTIVO

- $\wedge, \neg$ sono sufficienti a ESPRIMERE l'OR ($\vee$)
- $\vee, \neg$ sono sufficienti a ESPRIMERE l'AND ($\wedge$)

$$1) \quad \boxed{\neg(p \wedge q)} \equiv \neg p \boxed{\vee} \neg q$$

$$p \wedge q \equiv \boxed{\neg(\neg p \vee \neg q)}$$

applico $\neg$ a
entrambi i
membri

$$2) \quad p \vee q \equiv \boxed{\neg(\neg p \wedge \neg q)}$$

ESEMPIO

$$(p \wedge q) \vee (\neg r) \stackrel{2DH}{=} \neg (\neg (p \wedge q) \wedge \neg (\neg r))$$

$$\stackrel{DN}{=} \neg (\neg (p \wedge q) \wedge r)$$

$$(p \wedge q) \vee (\neg r) \stackrel{1DH}{=} (\neg (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg r)$$

HW: dimostrare la SECONDA Legge di De Morgan

- "semplificare" la proposizione $(a \wedge \neg b) \vee (\neg c \wedge d)$
 - ↳ per escludere il connettivo $\wedge$
 - ↳ per escludere il connettivo $\vee$

DEDUZIONE

$$p \Rightarrow q$$

"p implica q"

"Se p allora q"

CONDIZIONALE, IMPLICAZIONE, $\Rightarrow$

REGOLA di DEDUZIONE (MODUS PONENS)

Se p è VERA e inoltre $p \Rightarrow q$ è VERA,
allora q è VERA

p è chiamata PREMessa

q è chiamata CONCLUSIONE

ATTENZIONE: Se p è FALSA, cosa succede a $p \Rightarrow q$?

1) $p \Rightarrow q$ è VERA $\leadsto$ circa 5/6 voti

2) $p \Rightarrow q$ è FALSA $\leadsto$ circa 15/20 voti

La risposta CORRETTA è la 1) Se p è FALSA, $p \Rightarrow q$ è sempre VERA.

def

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

p : "oggi piove"

q : "porto l'ombrello"

Se p è FALSA, $\neg p$ è VERA e quindi $\neg p \vee q$ è VERA

"Se oggi piove allora porto l'ombrello"

$\equiv$

"Oggi NON piove oppure porto l'ombrello"

$p \Rightarrow q$ è FALSA se e solo se p è VERA e q è FALSA

TAVOLA di VERITÀ di $p \Rightarrow q$

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

↳ come viene usato in matematica

Qual è il titolo di questo libro? Indecidibilità, enigmi e paradossi

RAYMOND SMULLYAN

EQUIVALENZE LOGICHE

CONTRONOMIALE

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

HW · fare la tavola di VERITÀ di $\neg q \Rightarrow \neg p$ per dim. l'equivalenza

Altro modo di dim.:

$$p \Rightarrow q \stackrel{\text{DEF}}{\equiv} \neg p \vee q \stackrel{\text{COMM}}{\equiv} q \vee \neg p \stackrel{\text{DN}}{\equiv} \neg(\neg q) \vee \neg p \stackrel{\text{DEF}}{\equiv} \textcircled{1} \Rightarrow \textcircled{2} \\ \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

DIMOSTRAZIONE per ASSURDO

$$p \Rightarrow q \stackrel{\text{DEF}}{\equiv} \neg p \vee q \stackrel{\text{DN}}{\equiv} \neg p \vee \neg(\neg q) \stackrel{\text{2DN}}{\equiv} \neg(p \wedge \neg q)$$

$\uparrow$ HP (ipotesi) $\uparrow$ TH (tesi)

questo è FALSO quando $p \Rightarrow q$ è VERO

Quando voglio dimostrare un teorema ($p \Rightarrow q$),
voglio fare un ragionamento che mi porta a $p \Rightarrow q$ VERO

$p \Rightarrow q$ VERO è come dire $p \wedge \neg q$ è FALSO
quindi posso equivalentemente dimostrare $p \wedge \neg q$ FALSO.

CONTRADDIZIONE è una PROPOSIZIONE che è SEMPRE FALSA.

TAUTOLOGIA è una PROPOSIZIONE che è SEMPRE VERA.

HW :

- $p \Rightarrow (p \vee q)$
- $(\neg p) \Rightarrow (\neg(p \wedge q))$
- $\neg p \vee q \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

fare la tavola di verità
e verificare se sono
tautologie / contraddizioni

DOPPIA IMPLICAZIONE, "SE E SOLO SE" CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE, $\Leftrightarrow$

$p \Leftrightarrow q$ è VERA quando

- p e q sono VERE ENTRAMBE
- p e q sono FALSE ENTRAMBE

def

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
0	0	1	HW
0	1	0	
1	0	0	
1	1	1	

OR ESCLUSIVO, XOR, $\oplus$

$p \oplus q$ è VERO se p e q hanno valori di verità diversi

p	q	$p \oplus q$	$\neg(p \Leftrightarrow q)$
0	0	0	HW
0	1	1	
1	0	1	
1	1	0	